1.4 Badanie drgań wahadeł sprzężonych (M21)

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie okresów drgań normalnych oraz częstości dudnień w ruchu dwóch jednakowych wahadeł sprzężonych i porównanie uzyskanych wyników z wartościami przewidywanymi na podstawie teorii. Można również badać zależność okresu dudnień od odległości punktu zaczepienia sprężyny sprzęgającej wahadła od osi obrotu wahadeł.

Zagadnienia do przygotowania:

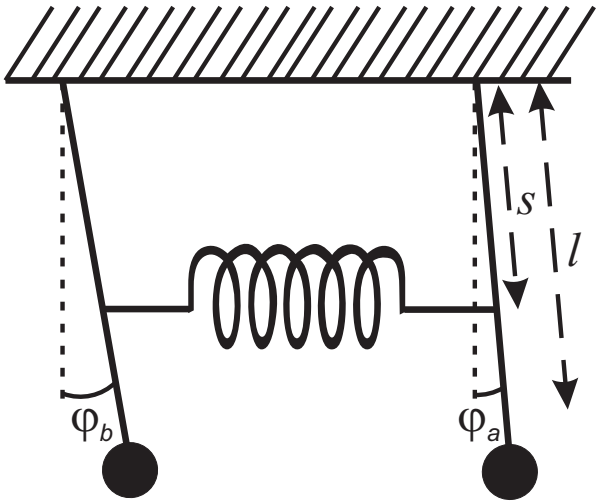
- *dynamika bryły sztywnej: przyspieszenie liniowe, przyspieszenie kątowe, moment bezwładności, moment bezwładności pręta i walca, twierdzenie Steinera, moment siły, II zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego;*
- *oscylator harmoniczny: ruch harmoniczny, ruch wahadła fizycznego przy małych wychyleniach z położenia równowagi (okres, częstość, amplituda, wychylenie, moment kierujący);*
- *opis ruchu wahadeł sprzężonych dla małych wychyleń z położenia równowagi: drgania normalne, dudnienia.*

Literatura podstawowa: [9] §11.6-11.9, 12.5; [25] §18.7, 16.6, 16.2-16.4; [11] §1 str. 17-22, 29-33, 44-52; literatura dodatkowa: [2].

1.4.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Rozważmy dwa identyczne wahadła fizyczne, połączone sprężyną, za której pośrednictwem energia drgań będzie przekazywana od jednego wahadła do drugiego. Układ taki, przedstawiony schematycznie na rysunku 1.4.1, nazywamy wahadłami sprzężonymi. Ograniczymy się tutaj do drgań o niewielkich wychyleniach z położenia równowagi, tak aby można je było rozważać jako drgania harmoniczne. Opis ruchu takiego układu w przypadku ogólnym może być dość skomplikowany. Układ dwóch wahadeł ma dwa stopnie swobody czyli do opisu jego ruchu potrzebujemy dwóch zmiennych, dla których otrzymujemy dwa równania ruchu. Zazwyczaj w każdym z równań występują jednocześnie obie zmienne i równań tych nie można rozwiązywać niezależnie. Jeżeli jednak równania ruchu, oprócz wyrazów z drugą pochodną, zawierają wyrazy liniowe w obydwu zmiennych (tzn. wyrazy wprost proporcjonalne do tych zmiennych), to możliwa jest transformacja do dwóch nowych zmiennych. Dla nowych zmiennych otrzymuje się dwa niezależne równania ruchu, tzn. każde z tych równań zależy tylko od jednej zmiennej. Nowe zmienne opisują tzw. drgania normalne (drgania własne) układu. Układ ma tyle rodzajów drgań własnych ile ma stopni swobody, tj. tyle ile jest zmiennych niezależnych opisujących jego ruch. Dowolne drganie każdego elementu układu można opisać jako pewną kombinację drgań normalnych, czyli ich superpozycję (złożenie).

Do opisu ruchu wahadeł sprzężonych najwygodniej jest wybrać kąty ich wychylenia z położenia równowagi φ_a i φ_b, stosując przybliżenie małych kątów, tzn. $\sin\varphi \approx \varphi$ oraz $\cos\varphi \approx 1$. Rozważmy ruch jednego wahadła (dla drgań swobodnych omówiony w rozdziale 1.2). Ruch wahadła swobodnego jest powodowany przez działanie momentu siły N_g pochodzącego od siły grawitacji:



Rys. 1.4.1: Schemat układu do badania drgań wahadeł sprzężonych.

$$N_g = mgl\sin(-\varphi_a) \approx -mgl\varphi_a = -D\varphi_a, \tag{1.4.1}$$

gdzie m jest masą wahadła, l jest odległością środka masy wahadła od punktku zawieszenia, g to przyspieszenie grawitacyjne, natomiast $D = mgl$ jest momentem kierującym. W przypadku występowania sprzężenia dodatkowo działa także moment siły sprzężenia N_s. Wahadła zawieszone są w takiej odległości, że dla położenia równowagi sprężyna nie jest rozciągnięta. Przy wychyleniu wahadeł o kąty φ_a i φ_b sprężyna rozciąga się o Δx:

$$\Delta x = s\sin\varphi_a - s\sin\varphi_b \approx s\left(\varphi_a - \varphi_b\right), \tag{1.4.2}$$

gdzie s jest odległością punktu zawieszenia sprężyny od punktu zaczepienia (długości sprzężenia). Jeżeli sprężyna ma stałą sprężystości k to moment siły pochodzący od sprężyny działający na wahadło a wynosi:

$$N_s = -sk\Delta x\cos\varphi_a \approx -ks^2\left(\varphi_a - \varphi_b\right). \tag{1.4.3}$$

Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla drugiego wahadła, pamiętając, że moment siły od sprężyny działający na nie ma przeciwny znak. Oznaczając moment sprzęgający przez $D_s = ks^2$ otrzymujemy sprzężony układ równań opisujący ruch wahadeł:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_a &= -D\varphi_a - D_s\left(\varphi_a - \varphi_b\right) \\ J\ddot{\varphi}_b &= -D\varphi_b - D_s\left(\varphi_b - \varphi_a\right) \end{aligned}. \tag{1.4.4}$$

Po podstawieniu

$$D/J = \omega_0^2 \quad \text{i} \quad D_s/J = K \tag{1.4.5}$$

i odpowiednich przekształceniach otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_a + \omega_0^2 \varphi_a + K\left(\varphi_a - \varphi_b\right) = 0 \\ \ddot{\varphi}_b + \omega_0^2 \varphi_b + K\left(\varphi_b - \varphi_a\right) = 0 \end{aligned} . \tag{1.4.6}$$

Każde z nich składa się z części znanej z równania dla wahadła swobodnego wykonującego drgania harmoniczne oraz z drugiej części zawierającej obie zmienne φ_a i φ_b. Właśnie ta część sprzęga oba równania ze sobą i nie pozwala na niezależne ich rozwiązanie w zmiennej φ_a lub φ_b. Jeżeli najpierw dodamy, a potem odejmiemy te dwa równania stronami to otrzymamy dwa nowe, równoważne im równania:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_a + \ddot{\varphi}_b + \omega_0^2\left(\varphi_a + \varphi_b\right) = 0 \\ \ddot{\varphi}_a - \ddot{\varphi}_b + \omega_0^2\left(\varphi_a - \varphi_b\right) + 2K\left(\varphi_a - \varphi_b\right) = 0 \end{aligned} . \tag{1.4.7}$$

Używając nowych zmiennych

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\varphi_a + \varphi_b\right) \quad \text{i} \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\varphi_a - \varphi_b\right) \tag{1.4.8}$$

otrzymujemy dwa niezależne równania dla każdej z tych zmiennych:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \left(\omega_0^2 + 2K\right)\varphi_2 = 0 \end{aligned} . \tag{1.4.9}$$

Każde z tych równań ma postać równania oscylatora harmonicznego, którego częstość wynosi odpowiednio:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 && \text{dla drgań opisywanych zmienną } \varphi_1 \\ \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 + 2K} && \text{dla drgań opisywanych zmienną } \varphi_2 \end{aligned} . \tag{1.4.10}$$

Rozwiązania równań tego typu są nam już znane:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ \varphi_2(t) = B\cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{aligned} . \tag{1.4.11}$$

Każde z tych równań opisuje pewne niezależne drganie harmoniczne, są to tzw. drgania normalne wahadeł sprzężonych. Pierwsze drganie normalne odbywa się z częstością ω_1, równą częstości drgań własnych wahadła swobodnego ω_0, a drugie drganie normalne odbywa się z większą od ω_1 częstością $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2K}$. Aby zobaczyć te drgania w ruchu dwóch identycznych wahadeł sprzężonych musimy wiedzieć jak wprawić je w ruch. W tym celu musimy powiązać zmienne φ_1 i φ_2 ze zmiennymi φ_a i φ_b, będącymi kątami wychylenia wahadeł z położenia równowagi. Ponieważ, na mocy wzoru (1.4.8), $\varphi_a = \varphi_1 + \varphi_2$ i $\varphi_b = \varphi_1 - \varphi_2$, to jako rozwiązania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varphi_a(t) &= A\cos(\omega_1 t + \delta_1) + B\cos(\omega_2 t + \delta_2) \\ \varphi_b(t) &= A\cos(\omega_1 t + \delta_1) - B\cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{aligned} . \tag{1.4.12}$$

Aby układ wykonywał pierwsze drganie normalne potrzeba, aby w dowolnej chwili $\varphi_2 = 0$, co jest spełnione gdy $B = 0$. Wtedy

$$\varphi_a(t) = A\cos(\omega_1 t + \delta_1) = \varphi_b(t), \tag{1.4.13}$$

czyli każde wahadło drga z częstością $\omega_1 = \omega_0$ i w dowolnej chwili mamy $\varphi_a = \varphi_b$. Podobnie, aby układ wykonywał drugie drganie normalne w dowolnej chwili $\varphi_1 = 0$, co jest równoważne wymaganiu aby $A = 0$. Wtedy

$$\varphi_a(t) = B\cos(\omega_2 t + \delta_2) = -\varphi_b(t) \tag{1.4.14}$$

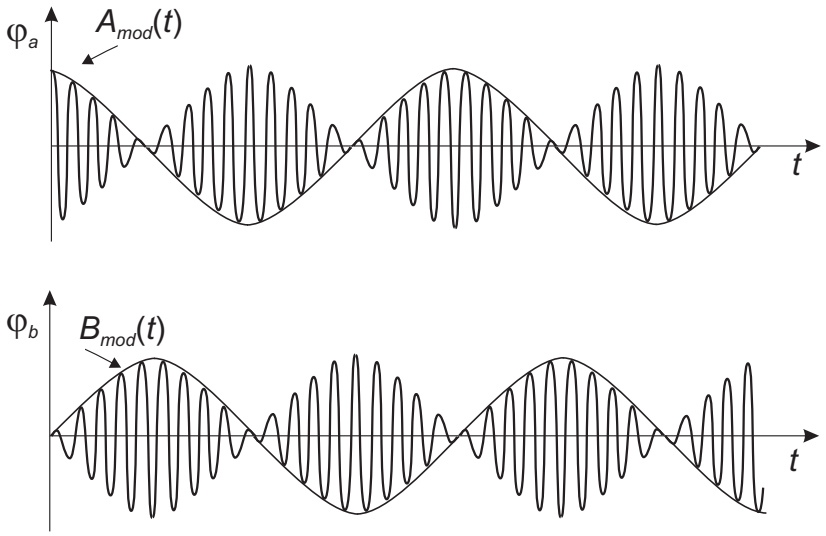
i każde z wahadeł drga z częstością $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2K}$ i w każdej chwili $\varphi_a = -\varphi_b$.

Rozważmy przypadek, gdy dwa drgające jednakowe wahadła sprzężone nie wykonują drgań normalnych. Dowolne rozwiązanie układu równań ruchu można przedstawić jako kombinację liniową znalezionych rozwiązań (1.4.12). Jeżeli, dla prostoty rachunku, przyjmiemy równość amplitud drgań normalnych i fazy początkowe równe zero ($A = B$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$) to z równań (1.4.12) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varphi_a(t) &= 2A\cos\left(\tfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\tfrac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) = A_{mod}(t)\cos\left(\tfrac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) \\ \varphi_b(t) &= 2A\sin\left(\tfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\sin\left(\tfrac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) = B_{mod}(t)\cos\left(\tfrac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) \end{aligned} . \tag{1.4.15}$$

Powyższe zależności przedstawione są w postaci graficznej na rysunku 1.4.2.

Opisując zachowanie wahadeł na podstawie powyższych równań, możemy powiedzieć, że każde z nich wykonuje dragania o częstości $\omega = (\omega_2 + \omega_1)/2$ i amplitudzie zmieniającej się w czasie z częstością $\omega_{mod} = (\omega_2 - \omega_1)/2$. Jednakże, gdy jedno z wahadeł ma maksymalne wychylenie, drugie w tym momencie spoczywa. Następnie amplituda pierwszego wahadła stopniowo maleje, a drugiego rośnie, aż sytuacja się odwróci. Następnie amplituda drugiego wahadła stopniowo maleje, a pierwszego rośnie i sytuacja powtarza się cyklicznie. W ciągu jednego okresu modulacji amplituda każdego



Rys. 1.4.2: Zależność wychylenia od czasu dla wahadeł sprzężonych wykonujących dudnienia (przy założeniu jednakowych amplitud drgań normalnych i faz początkowych równych zero).

wahadła dwukrotnie osiąga wartość maksymalną. Mówimy, że wahadła wykonują dudnienia z częstością $\omega_d = \omega_2 - \omega_1$. Dudnienia w układzie wahadeł sprzężonych polegają na okresowym wzmacnianiu i wygaszaniu amplitudy drgania początkowego, są więc wynikiem superpozycji drgań normalnych układu.

Zjawisko dudnień dwóch jednakowych wahadeł sprzężonych jest bardzo ładnym przykładem przekazu energii. W przypadku, gdy nie ma strat energii (dyssypacji energii) wahadła na zmianę przekazują sobie stopniowo całą energię i przekaz ten odbywa się z częstością dudnień.

Zadanie 1. Pokaż, że prawdziwy jest związek:

$$T_d = \frac{T_0 T_2}{T_0 - T_2}, \tag{1.4.16}$$

gdzie T_0 jest okresem drgań swobodnych wahadeł, T_2 jest okresem drugiego drgania normalnego układu jednakowych wahadeł sprzężonych, a T_d jest okresem dudnień.

Zadanie 2. Wykaż, że w przypadku słabego sprzężenia (tj. dla $K << \omega_0^2$) dla układu jednakowych wahadeł sprzężonych możemy zapisać:

$$D_s = 4\pi^2 \frac{J}{T_d T_0}. \tag{1.4.17}$$

Uwaga: skorzystaj ze wzorów (1.4.5) i (1.4.10) oraz przybliżenia $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ dla małych wartości x.

1.4.2 Przebieg pomiarów

Układ doświadczalny

W skład układu pomiarowego wchodzą: dwa jednakowe wahadła fizyczne, sprężyna (jako urządzenie sprzęgające wahadła), przymiar metrowy, suwmiarka i stoper.

Przebieg doświadczenia

Zanotuj masy pręta i krążka podane przy ćwiczeniu. Dokonaj pomiarów niezbędnych do wyznaczenia momentów bezwładności wahadeł (moment bezwładności używanego w tym ćwiczeniu wahadła jest sumą momentów bezwładności pręta i krążka liczonych względem osi obrotu wahadła). Wykonaj przynajmniej trzy pomiary każdej wielkości.

Ustal, czy wahadła można uważać za identyczne. Jeżeli nie, dokonaj koniecznej korekty. Zmierz czas trwania dwudziestu okresów drgań każdego wahadła swobodnego. Pomiar powtórz dziesięciokrotnie.

Połącz wahadła za pomocą sprężyny zamocowanej w połowie długości wahadeł. Wykonaj pomiar czasu trwania dwudziestu okresów dla pierwszego i drugiego drgania normalnego. Każdy pomiar powtórz trzykrotnie. Wykonaj pomiar czasu trwania dziesięciu dudnień powtarzając pomiar trzykrotnie. Dla kilku różnych długości sprzężenia s wykonaj pomiar czasu trwania dziesięciu dudnień. Każdy pomiar powtórz trzykrotnie.

1.4.3 Opracowanie wyników

Wyznaczyć okresy drgań wahadeł swobodnych oraz oszacować ich niepewności. Czy wahadła można uważać za jednakowe (czy uzyskane wartości są zgodne w granicach niepewności pomiarowych)? Znaleźć wartość częstości drgań własnych wahadeł swobodnych i jej niepewność. Obliczyć wartości momentu bezwładności J i momentu kierującego D wahadeł użytych w tym doświadczeniu oraz oszacować ich niepewności. Korzystając z tych wartości obliczyć częstości drgań własnych. Otrzymany wynik porównać z wartością wyznaczoną eksperymentalnie.

Sprawdzić czy wyznaczone eksperymentalnie wartości T_0, T_2 i T_d spełniają związek (1.4.16). Wyznaczyć częstość pierwszego i drugiego drgania normalnego oraz częstość dudnień i oszacować ich niepewności. Uzyskane wyniki porównać z przewidywaniami teoretycznymi.

Korzystając ze związku (1.4.17) wyznaczyć wartości momentu sprzęgającego D_s dla różnych wartości długości sprzężenia s wraz z niepewnościami pomiarowymi. Zależność $D_s(s)$ przedstawić na wykresie nanosząc prostokąty niepewności pomiarowych. Do danych eksperymentalnych dopasować odpowiedni wielomian.

Wyznaczyć wartości momentu sprzęgającego D_s korzystając z zależności (1.4.5) i (1.4.10) i oszacować niepewność pomiarową. Czy otrzymana wartość jest zgodna z wartością uzyskaną metodą opisaną powyżej? Która z tych metod zapewnia większą precyzję wyznaczenia momentu sprzęgającego wahadeł?