UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Podstawy opracowania wyników pomiarów z elementami analizy niepewności statystycznych

Dr inż. Marcin Zieliński

I Pracownia Fizyczna dla Biotechnologii, wtorki 8:00 - 10:45

Semestr letni 2023/2024

Rodzaje pomiarów

Pomiar bezpośredni:

- wielkość fizyczna mierzona jest bezpośrednio przy pomocy określonego przyrządu

Przykład:

- pomiar długości linijką,
- pomiar czasu np. stoperem.

Rodzaje pomiarów

Pomiar pośredni:

- wielkość fizyczna mierzona jest pośrednio poprzez pomiar innych wielkości fizycznych

(odległość - np. droga)

(czas pokonania drogi)

(prędkość)

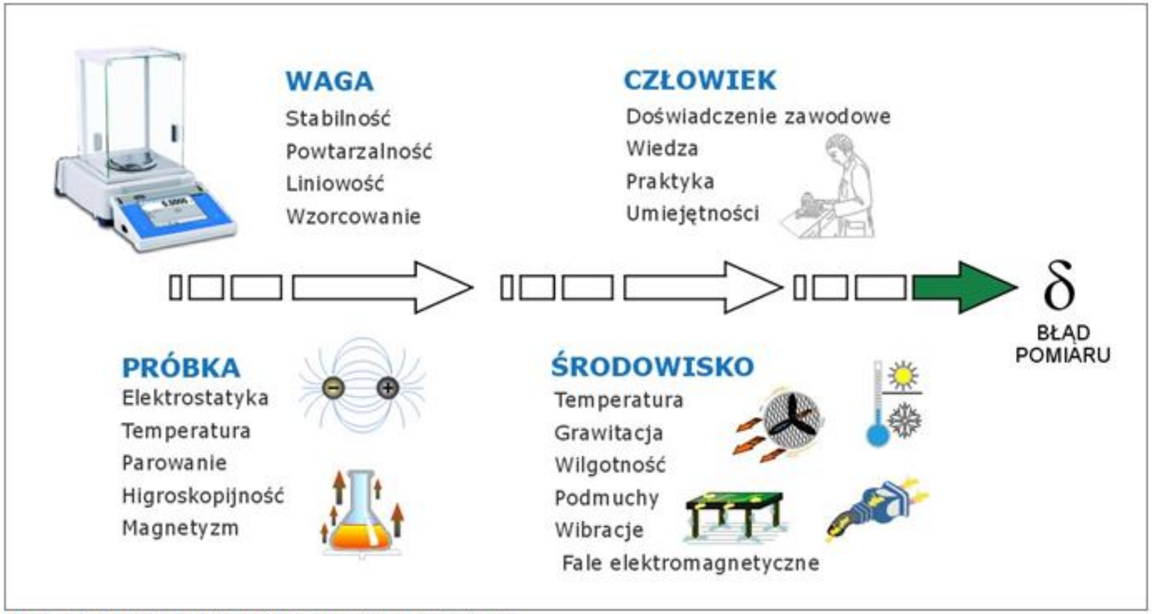
$$v = \frac{s}{t}$$

Używamy wzoru analitycznego do policzenia wartości szukanej wielkości w pomiarze pośrednim.

Dokładność pomiarów

Każdy pomiar, nawet najstaranniejszy i najdokładniejszy nie jest doskonały i ma <u>skończoną dokładność</u>!!!

Obarczony jest niepewnością pomiarową, a może i błędem!



Rys. Czynniki wpływające na błąd pomiaru

Niepewności pomiarowe

1. **Niepewności przypadkowe (statystyczne)**
   - powodowane przez skończoną dokładność przyrządów pomiarowych,
   - zmieniają się losowo od pomiaru do pomiaru,
   - niepewności przypadkowe można zmniejszać wykonując dany pomiar wielkości fizycznej wielokrotnie.

2. **Niepewności systematyczne**
   - powodowane przez systematyczny błąd urządzenia mierzącego (np. źle wyskalowana (wytarowana) waga, stoper który spieszy etc.),
   - zwykle trudne do zauważenia i oszacowania.

Błędy pomiarowe

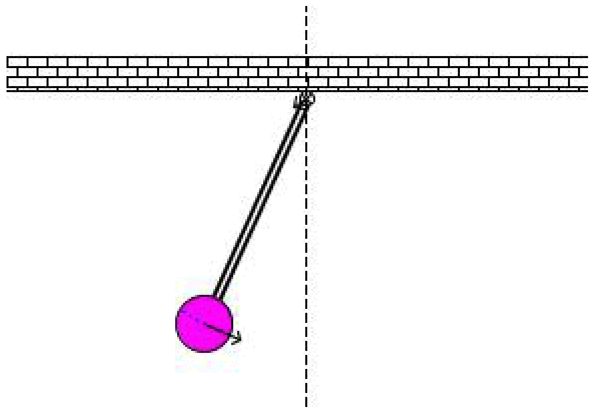
1. **Błąd gruby**
   - wynika z błędu popełnionego w czasie pomiaru lub odczytu,
   - błąd może być popełniony przez urządzenie (np. awaria) lub przez odczytującego (np. zła skala na linijce: cale zamiast cm),
   - zwykle na tyle duże, że można je łatwo zauważyć

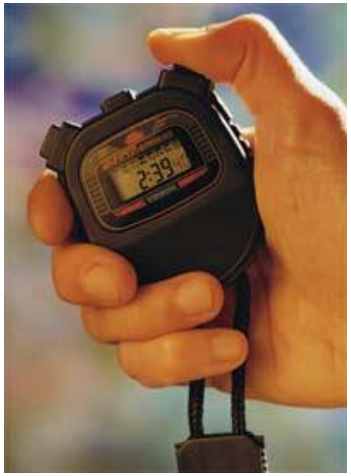
2. **Błąd przybliżenia**
   - popełniono błąd tworząc przybliżony model

UWAGA

NIEPEWNOŚĆ $\neq$ BŁĄD

Pomiar bezpośredni



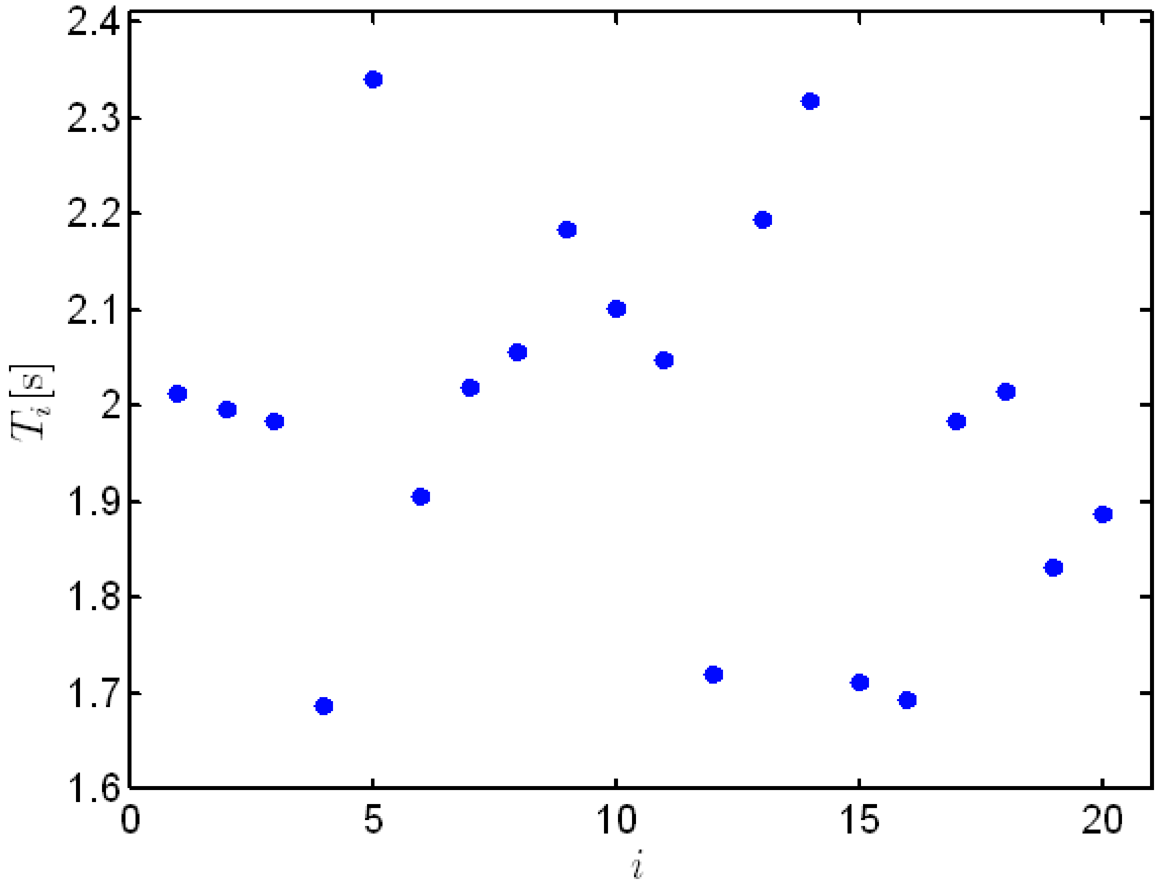


Pomiar okresu drgań wahadła (masa zawieszona na nici):

- dokładność stopera (0.1 s),
- czas reakcji eksperymentatora (0.2 s).

Pomiar bezpośredni

i-ty pomiar	T_i [s]
1	2.01
2	2.00
3	1.98
4	1.69
5	2.34
6	1.91
7	2.02
8	2.06
9	2.18
10	2.10
11	2.05
12	1.72
13	2.19
14	2.32
15	1.71
16	1.69
17	1.99
18	2.02
19	1.83
20	1.89

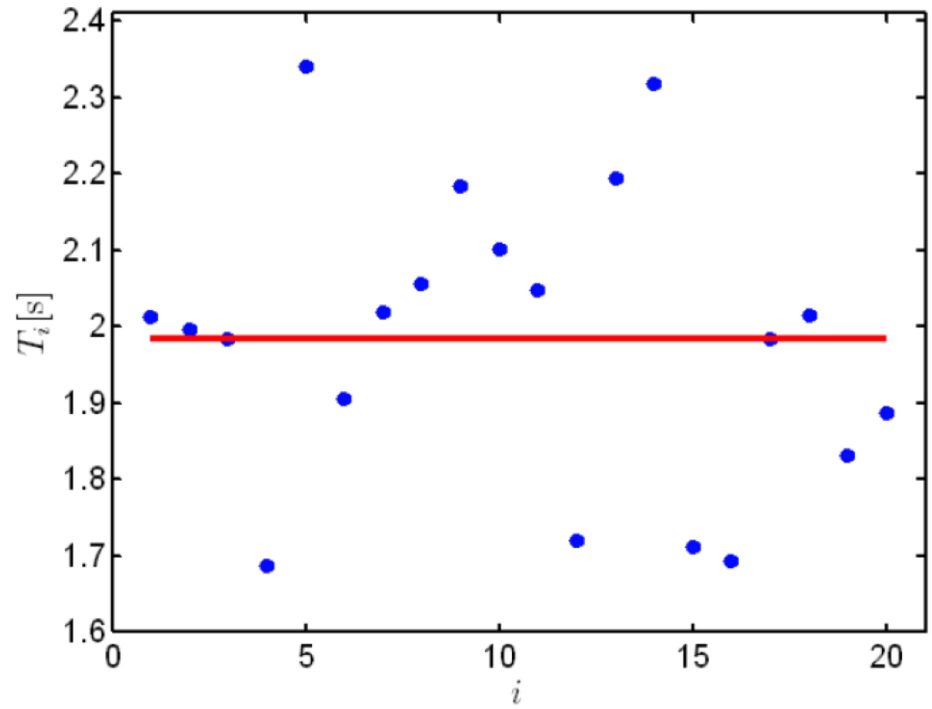


Naszym zadaniem jest podanie wyniku i jego niepewności !

Wartość oczekiwana (prawdziwa)

Najlepszym oszacowaniem wartości oczekiwanej (wartości prawdziwej) jest średnia arytmetyczna wyników pomiarów serii

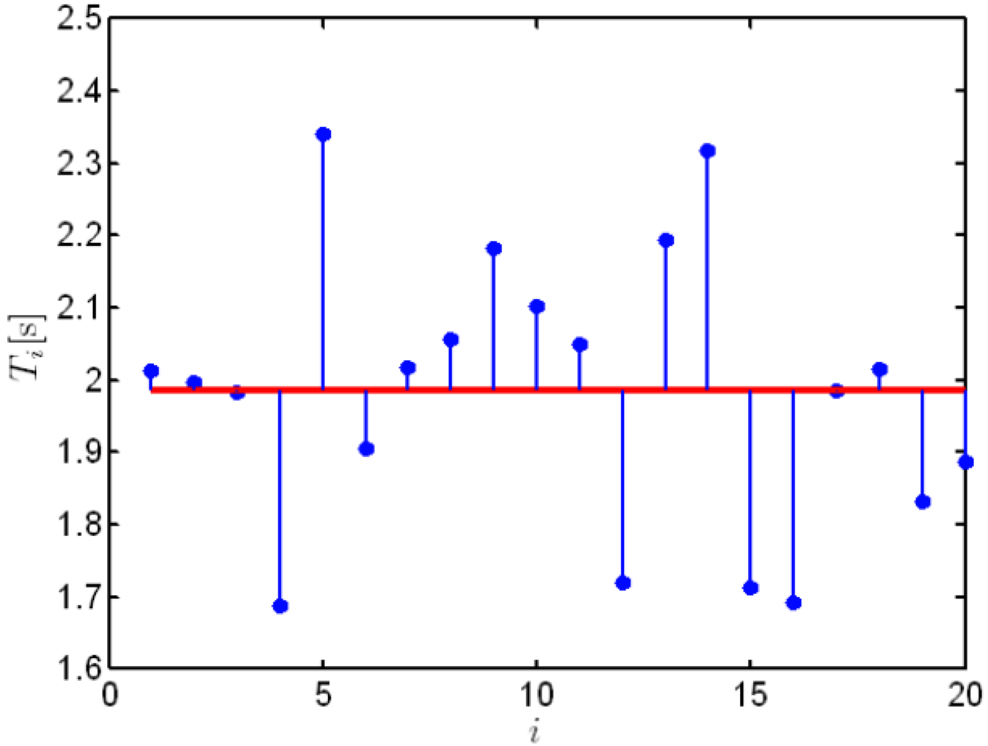
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$



Niepewność pojedyńczego pomiaru

Wielkością najlepiej opisującą niepewność pojedynczego pomiaru jest rozrzut pomiarów wokół wartości średniej **odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru** [estymator odchylenia standartowego]

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

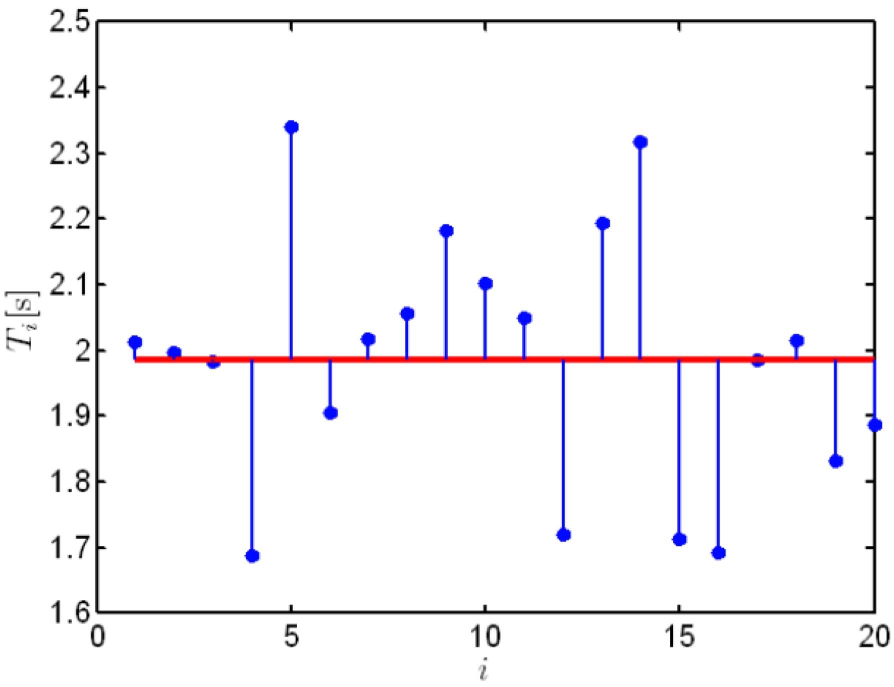


Niepewność wartości oczekiwanej (średniej arytmetycznej)

Wielkością najlepiej opisującą niepewność wyniku jest **odchylenie standardowe średniej arytmetycznej**

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \qquad S_{\bar{x}} < S_x$$



Niepewność średniej można zmiejszać zwiększając liczbę pomiarów!

Pomiar bezpośredni - podsumowanie

Niepewności przypadkowe możemy ograniczyć wykonując wielokrotne pomiary danej wielkości – „budujemy statystykę”
Statystyka pozwala szacować niepewności przypadkowe

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

→ wartość oczekiwana (średnia arytmetyczna)

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

→ odchylenie standardowe (niepewność standardowa) pojedyńczego pomiaru

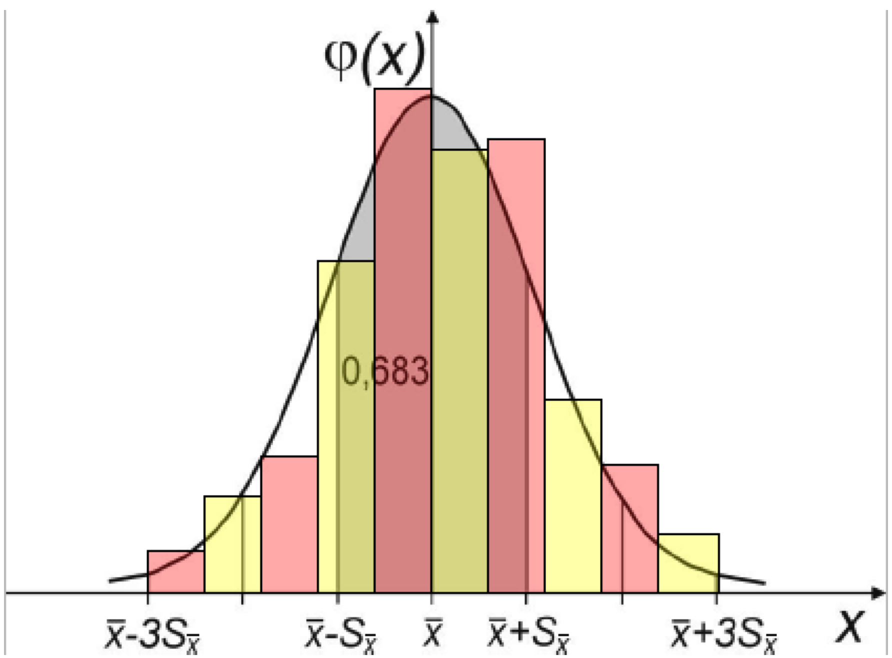
$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

→ odchylenie standardowe (niepewność standardowa) wartości oczekiwanej

Analiza statystyczna niepewności przypadkowych

Dla niepewności przypadkowych rozkład wielkości mierzonych wokół wartości prawdziwej dany jest **rozkładem Gaussa**

$$\varphi_{(\bar{x},S_x)}(x) = \frac{1}{S_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\bar{x})^2/2S_{\bar{x}}^2}$$



Uwaga:

Prawdziwa wartość mierzonej wielkości utożsamiana z wartością oczekiwaną

W przedziale $[x-S_{\bar{x}}, x+S_{\bar{x}}]$ mieści się 68,3% wszystkich wyników

W przedziale $[x-3S_{\bar{x}}, x+3S_{\bar{x}}]$ mieści się 99,8% wszystkich wyników

Często odchylenie standardowe wielkości średniej (wyniku) oznaczane jest jako **σ** , a wartość średnia (wartość oczekiwana, wynik) jako **x_0**

Małe serie pomiarowe - rozkład Studenta

Dla małej liczby pomiarów tj. poniżej 10 (n < 10) niepewność standardowa średniej (odchylenie standardowe) daje zaniżoną wartość.

$$\boxed{S_{\bar{x}} \rightarrow t_{n,\propto} S_{\bar{x}}}$$

$t_{n,\alpha}$ Współczynnik Studenta

n Liczba pomiarów

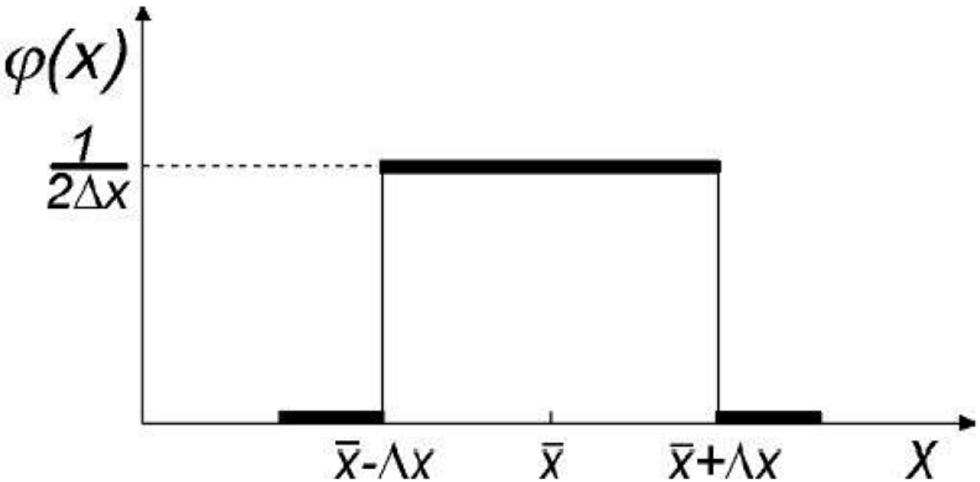
α Poziom ufności

n	α=0.6828	α=0.95	α=0.99
2	1.837	12.706	63.657
3	1.321	4.303	9.926
4	1.197	3.182	5.841
5	1.141	2.776	4.604
6	1.11	2.58	4.032
7	1.09	2.447	3.707
8	1.077	2.365	3.5
9	1.066	2.306	3.355
10	1.059	2.252	3.25

Poziom ufności – prawdopodobieństwo z jakim wyznaczony przedział zawiera wartość rzeczywistą mierzonej wielkości.

Całkowita niepewność pomiarowa

Niepewność systematyczna w ujęciu statystycznym:



$$S_{\bar{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

Całkowita niepewność pomiarowa:

$$\overline{S_x} = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + \frac{1}{3}(\Delta\, x)^2}$$

Niepewność w pomiarach pośrednich

Propagacja odchylenia standardowego i niepewności maksymalnej:

W pomiarach pośrednich istnieją związki funkcyjne pomiędzy poszukiwaną wielkością a wielkościami mierzonymi:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

np.: $$v = \frac{l}{t}$$

Wartość oczekiwana tej wielkości jest funkcją z wartości oczekiwanych jej poszczególnych zmiennych:

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n)$$

np.: $$\bar{v} = \frac{\bar{l}}{\bar{t}}$$

Odchylenie standardowe tej poszukiwanej wielkości jest funkcją odchyleń wielkości mierzonych:

$$S_{\bar{z}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} S_{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} S_{\bar{x}_2}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} S_{\bar{x}_n}\right)^2}$$

np.:

$$S_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}} S_{\bar{l}}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{l}}{\bar{t}^2} S_{\bar{t}}\right)^2}$$

Pochodne

Teoria		Przykłady	
Pochodna funkcji potęgowej			
$f(x) = Ax^n$	$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = Anx^{n-1}$	$f(x) = 3x^{2/3}$	$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x^{-1/3}$
Pochodna funkcji wykładniczej			
$f(x) = Ae^{Bx}$	$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = ABe^{Bx}$	$f(x) = \dfrac{3}{2}e^{-3.8x}$	$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = -5{,}7e^{-3.8x}$
Pochodna funkcji logarytmicznej			
$f(x) = A\ln Bx$	$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{AB}{x}$	$f(x) = 2\ln\dfrac{x}{3}$	$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2}{3x}$
Pochodna funkcji złożonej			
$f(x) = f_1(f_2(x))$	$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial f_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$	$f(x) = x^{1/x}$	$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2}x^{1/x-1}$
Pochodna sumy i różnicy funkcji			
$f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$	$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} \pm \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$	$f(x) = x + \dfrac{1}{3}\ln 2x$	$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 + \dfrac{2}{3x}$

Średnia ważona

Dwa pomiary (serie pomiarowe) tej samej wielkości ze znacząco różnymi niepewnościami:

$$\bar{x}_A \quad S_{\bar{x}_A}$$
$$\bar{x}_B \quad S_{\bar{x}_B}$$

$$\boxed{\bar{x}_w = \frac{w_A \bar{x}_A + w_B \bar{x}_B}{w_A + w_B}}$$

(Średnia ważona)

$$\boxed{S_{\bar{x}_w} = \frac{1}{\sqrt{w_A + w_B}}}$$

(odchylenie średniej)

$$w_A = \frac{1}{S_{\bar{x}_A}^2} \qquad w_B = \frac{1}{S_{\bar{x}_B}^2}$$

(wagi)

Porównanie zmierzonych wartości

Porównanie z wielkością tablicową

$$|\overline{x} - x_{tab}| < \Delta x$$

zgodność

Porównanie dwóch zmierzonych wielkości

$$|\overline{x}_A - \overline{x}_B| < \Delta x_A + \Delta x_B$$

zgodność

Zapis wyniku pomiaru

Zawsze podaje się tylko **dwie cyfry znaczące** estymatora niepewności. Liczymy co najmniej trzy i zaokrąglamy zawsze do góry.

Wynik pomiaru obliczamy o co najmniej jedno miejsce dziesiętne dalej niż miejsce dziesiętne, na którym zaokrąglono błąd, a następnie zaokrąglamy wg. normalnych reguł do tego samego miejsca dziesiętnego, do którego zaokrąglono błąd.

$$\bar{g} = 9.8145467\,\frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.21434\,\frac{m}{s^2}$$

notatki, kalkulator

$$\boxed{\bar{g} = 9.81\,\frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22\,\frac{m}{s^2}}$$

$$\boxed{g=(9.81 \pm 0.22)\ \mathrm{m/s^2}}$$

wynik końcowy pomiaru

$$\xcancel{\bar{g} = 9.814\,\frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22\,\frac{m}{s^2}}$$

$$\xcancel{\bar{g} = 9.81\,\frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.214\,\frac{m}{s^2}}$$

Graficzne przedstawienie wyników pomiaru

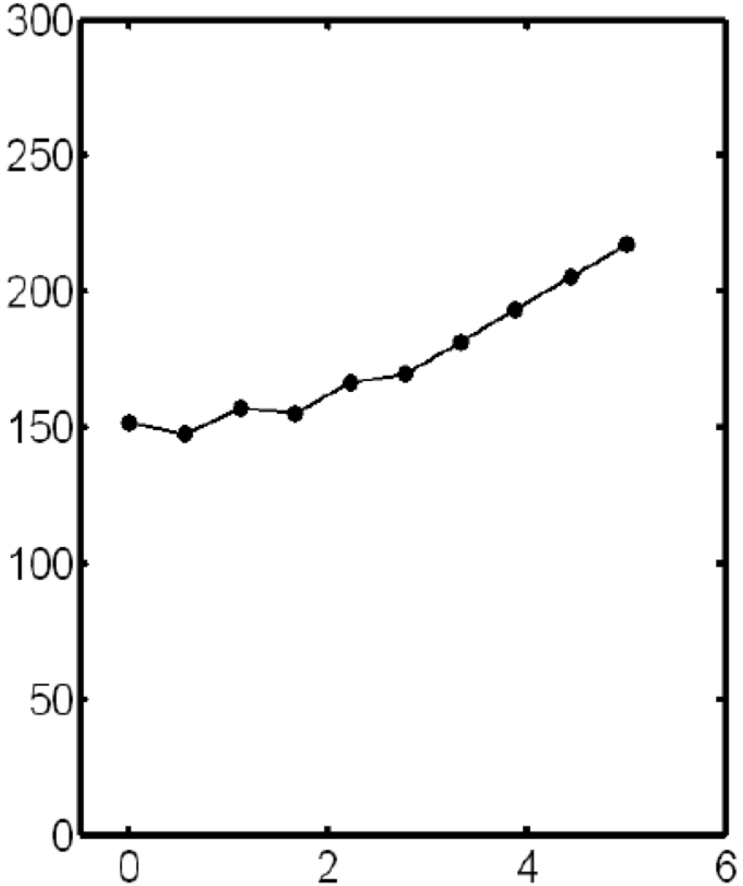
Najbardziej efektywny sposób przedstawienia wyników pomiarów

Pozwalają m.in. na:

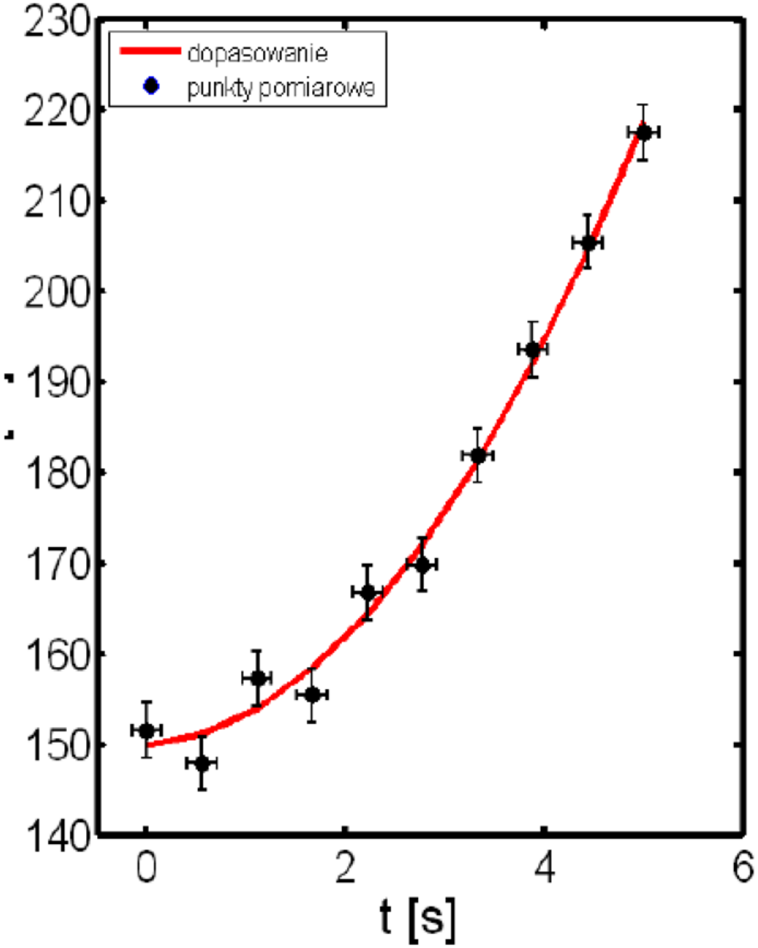
- Oglądowe przedstawienie wyników
- Wyznaczenie zależności między zmierzonymi wielkościami
- Testowanie modeli
- Oszacowanie wielkości fizycznych

Graficzne przedstawienie wyników pomiaru

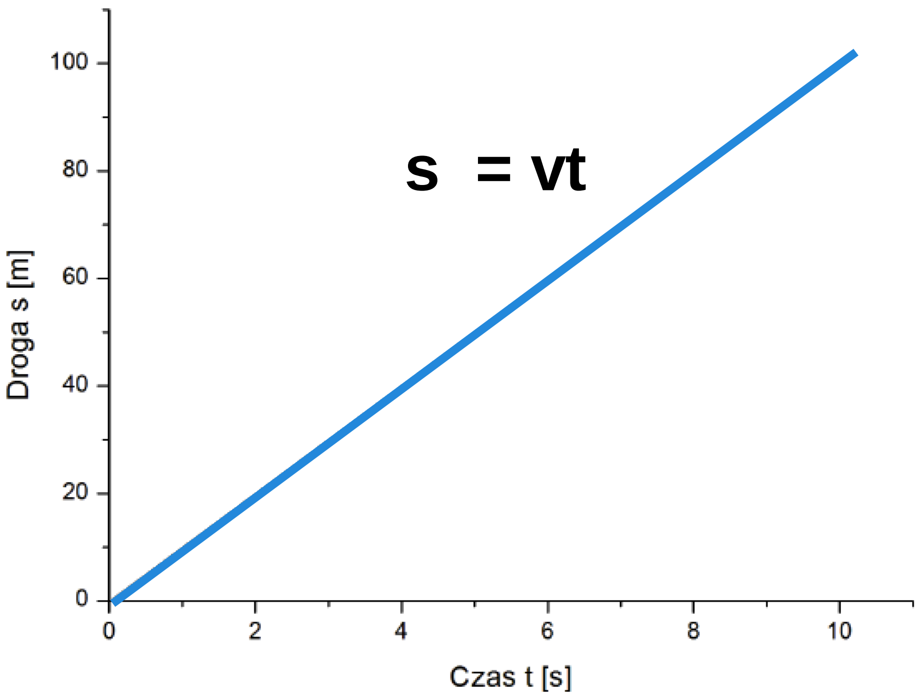
źle



dobrze



Regresja liniowa

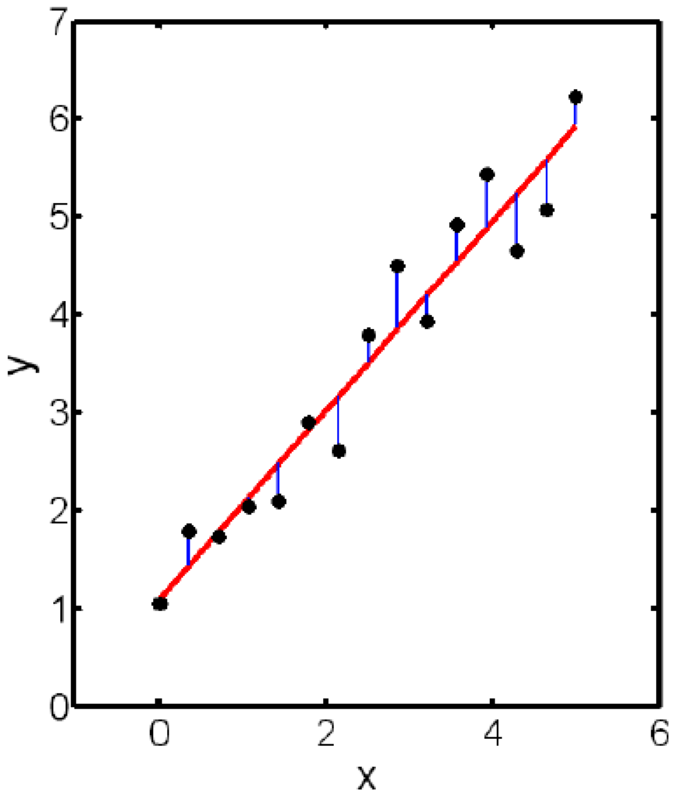


Wiele wielkości ma charakter liniowy !

$$y = ax + b$$

Regresja liniowa

$$y = ax + b$$



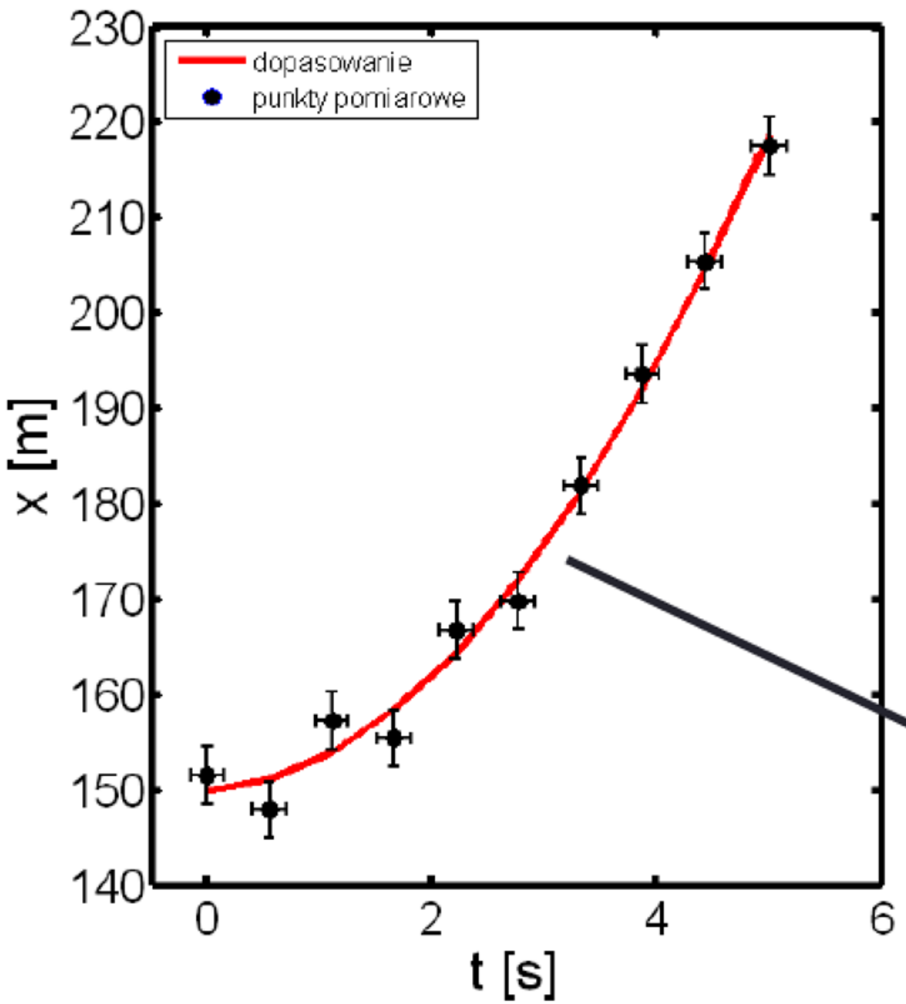
$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$S_a = \sqrt{\frac{n}{n-2} \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - b\sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}}$$

$$S_b = S_a \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

Dopasowanie innych zależności funkcyjnych



$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$$

a, V_0, x_0

Literatura

- ***I Pracownia fizyczna* , red. A. Magiera, OWI Kraków 2006**
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, PWN Warszawa 1999
- A. Zięba, *Postępy Fizyki*, tom 52, zeszyt 5, 2001, str.238-247
- B. Kamys, *Statystyczne Metody Opracowania Pomiarów I* (http://users.uj.edu.pl/~ufkamys/BK/smop1N_h.pdf)

- **Programy do opracowywania danych**
  - Excel
  - Mathematica
  - Statistica
  - Matlab
  - **Origin**