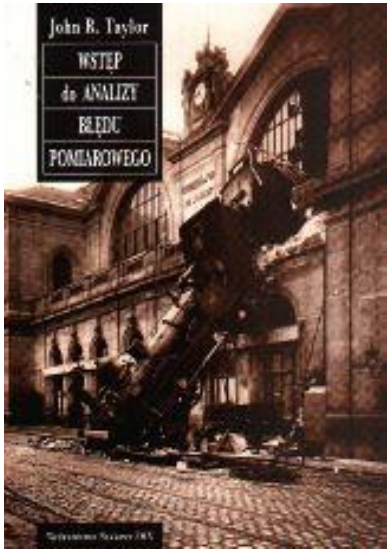
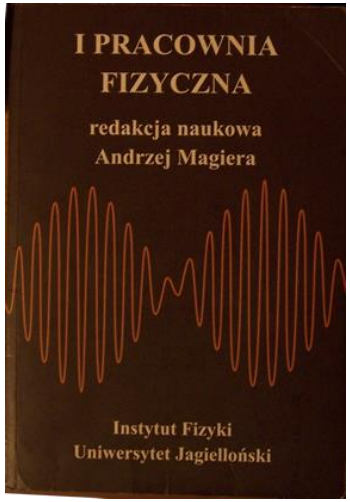
PODSTAWY OPRACOWANIA WYNIKÓW POMIARÓW Z ELEMENTAMI ANALIZY NIEPEWNOŚCI POMIAROWYCH

I Pracowania IF UJ – Październik 2007

PODRĘCZNIKI



Wstęp do analizy błędu pomiarowego
John R. Taylor
Wydawnictwo Naukowe PWN
Warszawa 1999



I Pracownia fizyczna
Pod redakcją Andrzeja Magiery
Instytut Fizyki UJ
Kraków 2006

www.wikipedia.org

POMIAR FIZYCZNY

Pomiar bezpośredni

Pomiar, w którym konkretna wielkość fizyczna mierzona jest bezpośrednio przy pomocy określonego przyrządu

Przykłady:

- Pomiar długości linijką
- Pomiar czasu stoperem

Pomiar pośredni

Pomiar, w którym dana wielkość fizyczna mierzona jest pośrednio poprzez pomiar innych wielkości fizycznych

$$v = \frac{s}{t}$$

Przykłady:

- Pomiar prędkości przy pomocy linijki i stopera

NIEPEWNOŚCI VS. BŁĘDY

Niepewność pomiarowa

Wtedy, gdy mimo skrupulatnego wykonania pomiaru nie da się wyznaczyć danej wielkości z większą dokładnością

- Niepewności przypadkowe

  Przykłady:
  - Skończona dokładność przyrządu pomiarowego

- Niepewności systematyczne

  Przykłady:
  - Ważenie przy pomocy źle wyskalowanej wagi
  - Pomiar czasu stoperem, który spieszy

Błąd pomiarowy

Wtedy, gdy urządzenie lub osoba prowadząca pomiar źle zmierzyła dana wielkość

- Błędy grube

  Przykłady:
  - Źle odczytano wartość z miernika

- Błędy przybliżenia

  Przykłady:
  - Popełniono błąd tworząc model

NIEPEWNOŚCI PRZYPADKOWE VS. SYSTEMATYCZNE

Pomiar długości igły przy pomocy linijki o podziałce 1 mm

Wyniki:
30, 31, 29, 32, 31, 28, 30,…

Pomiary wyraźnie rozrzucone wokół określone wartości

Błędy przypadkowe

Inna linijka – Wyniki 2:
34, 35, 33, 36, 35, 32, 34,…

Wyniki pomiarów rozrzucone i wyraźnie zawyżone w stosunku do poprzednich pomiarów – źle wyskalowana linijka

Błędy przypadkowe + Błędy systematyczne

Niepewności przypadkowe można zmniejszyć powtarzając dany pomiar wielokrotnie czyli budując systematykę

Niepewności systematyczne są trudne do zinterpretowania i do wyeliminowania

NIEPEWNOŚCI PRZYPADKOWE

Niepewności przypadkowe mogą być ograniczone poprzez wielokrotny pomiar danej wielkości. Metody statystyki pozwalają oszacować te niepewności zarówno jakościowo jak i ilościowo.

Ważne pojęcia **analizy statystycznej**

- Wartość oczekiwana

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

- Odchylenie standardowe wartości średniej

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

i	x_i	$d_i=x_i-x$	$d_i^2=(x_i-x)^2$
1	30	-0,2	0,04
2	31	0,8	0,64
3	29	-1,2	1,44
4	32	1,8	3,24
5	31	0,8	0,64
6	28	-2,2	4,84
	$\Sigma x_i=181$	$\Sigma d_i=0$	$\Sigma d_i^2=10{,}84$ $\overline{d^2}=1{,}8$
	$\bar{x}=30{,}2$		$S_x=1{,}5$ $S_x=0{,}6$

INNE ESTYMATORY – ŚREDNIA WAŻONA

Wartość oczekiwana

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Waga $w_i = \frac{1}{S^2_{\bar{x}_i}}$

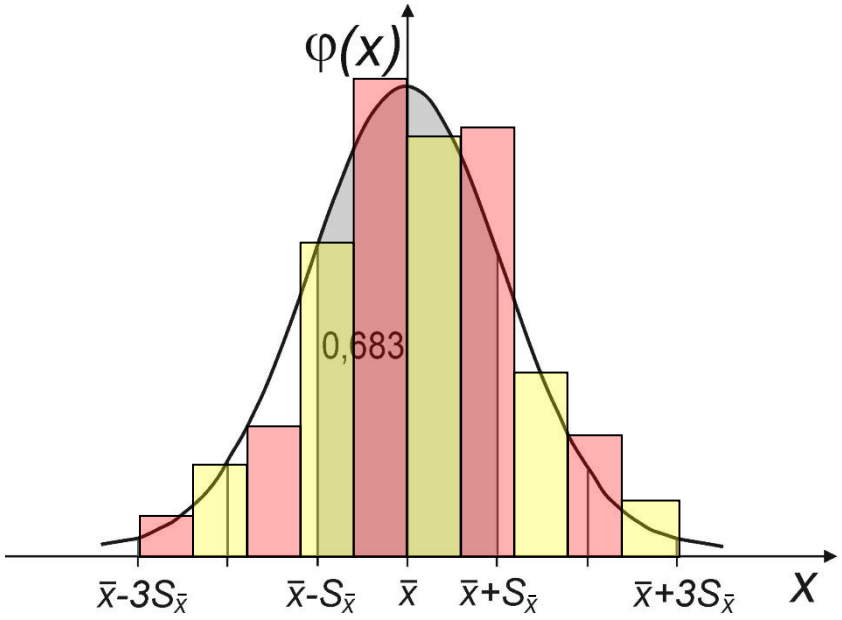
Odchylenie standardowe wartości średniej

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \quad \Rightarrow \quad S_{\bar{x}_w} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

ROZKŁAD GAUSSA

Dla błędów przypadkowych rozkład wielkości mierzonych wokół wartości prawdziwej dany jest rozkładem Gaussa

$$\varphi_{(\bar{x},S_x)}(x) = \frac{1}{S_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\bar{x})^2/2S_{\bar{x}}^2}$$



Prawdziwa wartość mierzonej wielkości utożsamiana z wartością oczekiwaną

W przedziale $[\bar{x}-S_x, \bar{x}+S_x]$ mieści się 68,3% wszystkich wyników

W przedziale $[\bar{x}-3S_x, \bar{x}+3S_x]$ mieści się 99,8% wszystkich wyników

UWAGA!!!
Przy skończonej liczbie pomiarów parametru rozkładu można tylko estymować (przybliżać)

ROZKŁAD STUDENTA-FISHERA

Gdy mamy małą liczbę pomiarów (n<10), odchylenie standardowe $S_{\bar{x}}$ przyjmuje zaniżoną wartość!!!

Chcąc uzyskać odpowiednią wartość wyznaczone S_x należy przemnożyć przez odpowiedni współczynnik tzw. współczynnik rozkładu Studenta-Fishera

Współczynnik ten zależy od liczby pomiarów ***n*** i od poziomu ufności ***α***

n	**α=0,683**	**α=0,9**	**α=0,95**	**α=0,99**	**α=0,999**
2	1,837	6,314	12,706	63,657	636,619
3	1,321	2,920	4,303	9,915	31,599
4	1,197	2,353	3,182	5,841	12,924
5	1,141	2,312	2,776	4,604	8,610
6	1,110	2,015	2,580	4,032	6,869
7	1,090	1,943	2,447	3,707	5,959
8	1,077	1,895	2,365	3,500	5,408
9	1,066	1,860	2,306	3,355	5,101
10	1,059	1,833	2,252	3,250	4,781

NIEPEWNOŚCI SYSTEMATYCZNE

Oprócz niepewności przypadkowych w pomiarach mogą się również pojawić niepewności związane z urządzeniem, przy pomocy którego wykonujemy pomiar:

- niepewność skali $\Delta_d x$ – związana z odległością między działkami na skali miernika

Zazwyczaj przyjmujemy odległość między dwoma kolejnymi działkami, choć gdy te są daleko można przyjąć połowę albo nawet 1/3 tej odległości

- niepewność klasy przyrządu $\Delta_k x$

$$\Delta_k x = \frac{\text{klasa} \times \text{zakres}}{100}$$

Łącznie niepewność dana jest zależnością

$$\bar{S}_x = \sqrt{S_{\bar{x}} + \frac{1}{3}(\Delta_d x)^2 + \frac{1}{3}(\Delta_k x)^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_x \to S_{\bar{x}}$$

Uwaga!!! Przyrządy cyfrowe mają zaniedbywalne niepewność w stosunku do niepewności przypadkowej

NIEPEWNOŚCI SYSTEMATYCZNE

Oprócz niepewności przypadkowych w pomiarach mogą się również pojawić niepewności związane z urządzeniem, przy pomocy którego wykonujemy pomiar:

- niepewność skali $\Delta_d x$ – związana z odległością między działkami na skali miernika

Zazwyczaj przyjmujemy odległość między dwoma kolejnymi działkami, choć gdy te są daleko można przyjąć połowę albo nawet 1/3 tej odległości

- niepewność klasy przyrządu $\Delta_k x$

$$\Delta_k x = \frac{\text{klasa} \times \text{zakres}}{100}$$

Łącznie niepewność dana jest zależnością

$$\bar{S}_x = \sqrt{S_{\bar{x}} + \frac{1}{3}(\Delta_d x)^2 + \frac{1}{3}(\Delta_k x)^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_x \to S_{\bar{x}}$$

Uwaga!!! Przyrządy cyfrowe mają zaniedbywalne niepewność w stosunku do niepewności przypadkowej

NIEPEWNOŚCI W POMIARACH POŚREDNICH

W pomiarach pośrednich istnieją związki funkcyjne pomiędzy poszukiwaną wielkością a wielkościami mierzonymi:

$$z = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$$

np. $$v = \frac{l}{t}$$

Wartość oczekiwana tej wielkości jest funkcją z wartości oczekiwanych jej poszczególnych zmiennych:

$$\bar{z} = f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots \overline{x_n}\right)$$

np. $$\bar{v} = \frac{\bar{l}}{\bar{t}}$$

Odchylenie standardowe tej poszukiwanej wielkości jest funkcją odchyleń wielkości mierzonych

$$S_{\bar{z}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} S_{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} S_{\bar{x}_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} S_{\bar{x}_n}\right)^2}$$

np. $$S_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}} S_{\bar{l}}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{l}}{\bar{t}^2} S_{\bar{t}}\right)^2}$$

PRZYKŁADY

Błąd sumy i różnicy

$$l = l_1 \pm l_2 \Rightarrow \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

Błąd wielkości pomnożonej przez stałą

$$t = At_1 \Rightarrow \Delta t = A\Delta t_1$$

Błąd iloczynu

$$s = l_1 l_2 \Rightarrow \Delta s = \bar{l}_2 \Delta l_1 + \bar{l}_1 \Delta l_2$$

Błąd ilorazu

$$v = \frac{l}{t} \Rightarrow \Delta v = \left|\frac{1}{\bar{t}}\right| \Delta l + \left|\frac{\bar{l}}{\bar{t}^2}\right| \Delta t$$

Błąd funkcji potęgowej

$$a = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow \Delta a = \left|\frac{2g\bar{t}}{2}\right| \Delta t = \left|g\bar{t}\right| \Delta t$$

Błąd funkcji wykładniczej

$$y = e^{Ax} \Rightarrow \Delta y = \left|Ae^{A\bar{x}}\right| \Delta x$$

Błąd funkcji logarytm naturalny

$$y = \ln x \Rightarrow \Delta y = \left|\frac{1}{\bar{x}}\right| \Delta x$$

PRZEDSTAWIENIE WYNIKÓW

Wyniki:
30, 31, 29, 32, 31, 28, 30

Wartość średnia

$\bar{x} = 30{,}14285714\ldots$

Odchylenie standardowe

$S_{\bar{x}} = 0{,}508432298\ldots$

Zasady:

1) Tylko dwie liczby znaczące w błędzie.
2) Błąd zawsze zaokrąglamy do góry.
3) Wartość średnią podajemy z tą samą dokładnością co niepewność.
4) Odpowiednie miejsce zaokrąglamy.

$\Delta x = 2{,}447 \times 0{,}51 =$
$= 1{,}26327 \approx 1{,}3$

$\bar{x} = 30{,}1$

Zapis:

$x = 30{,}1 \pm 1{,}3$ [mm]

$x = 30{,}1(13)$ [mm]

ZAPIS WYNIKÓW

Wygodnym sposobem zapisu wyników eksperymentu jest przedstawienie ich w tabeli

- Wartości jednej wielkości zapisujemy w kolumnie.
- Nagłówek kolumny powinien zawierać symbol wielkości i jej jednostkę.
- Wielkość jednostki miary dobieramy tak, aby zapisywane liczby mieściły się w zakresie 0,1 do 1000.

t [s]	s [m]
0,3	0,6
0,7	1,3
1,1	2,5

GRAFICZNE PRZEDSTAWIENIE WYNIKÓW

Wyniki eksperymentu wygodnie przedstawić przy pomocy wykresu

- Oglądowe przedstawienie wyników,
- Graficzne przedstawienie zależności wyników pozwala na wyznaczenie pewnych zależności,

$$s = vt$$

$$U = RI$$

- Na wykresie łatwiej wychwycić pewne empiryczne relacje między wielkościami.

ZAPIS WYNIKÓW

1. seria

t [s]	s [m]
0,3	0,6
0,4	0,7
…	…
t=0,33± 0,06	s=0,66± 0,04

2. seria

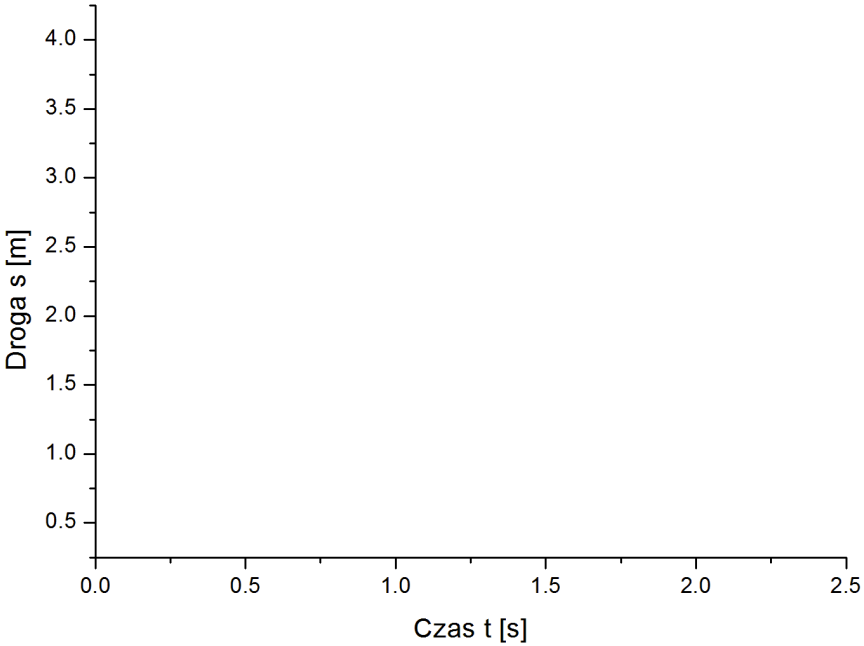
t [s]	s [m]
1,0	1,9
1,0	1,8
…	…
t=1,03± 0,04	s=1,83± 0,09

3. seria

t [s]	s [m]
1,5	3,2
1,4	2,9
…	…
t=1,42± 0,03	s=2,99± 0,09

4. seria

t [s]	s [m]
2,1	4,0
2,3	3,8
…	…
t=2,31± 0,12	s=3,91± 0,10

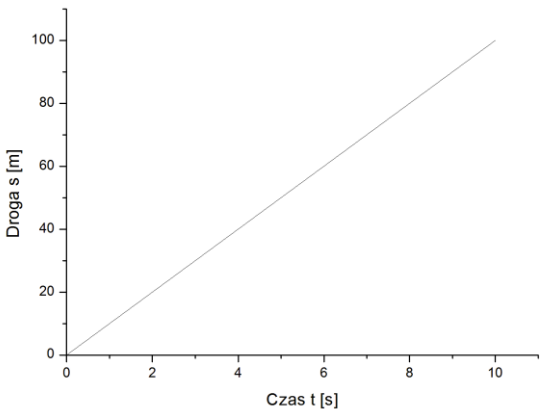


Dla wszystkich pomiarów wykonanych w jednakowych warunkach dopasujemy odpowiednią funkcję

REGRESJA LINIOWA

Wiele zależności ma charakter liniowy

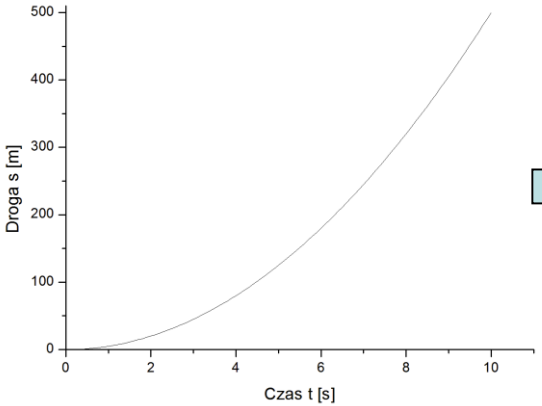
$$s = vt$$

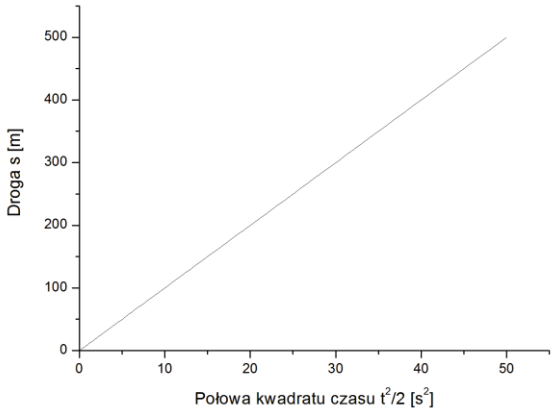


Inne nawet jeśli takie nie są

to mogą zostać zlinearyzowane

$$s = \frac{at^2}{2}$$





UWAGA!!! Trzeba pamiętać o propagacji błędów

REGRESJA LINIOWA

Do zależności liniowej można dopasować prostą w postaci

$$y = ax + b$$

a następnie współczynnik kierunkowy a oraz wyraz wolny b związać z poszukiwaną wielkością

Wzory na wartości oczekiwane a i b oraz na ich odchylenia standardowe S_a i S_b

$$\bar{a} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{n}{n-2} \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{a}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{b}\sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}}$$

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{a}\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$S_{\bar{b}} = S_{\bar{a}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

REGRESJA LINIOWA

Na szczęście istnieją programy przy pomocy których można to zrobić automatycznie np.:

- Excel,
- Mathematica,
- Statistica,
- Matlab,
- **Origin**.