M-0: Pomiar przyspieszenia grawitacyjnego

Bogdan Damski
Fizyka
(18/09/2020)

I. WPROWADZENIE

Celem tego ćwiczenia jest pomiar przyspieszenia grawitacyjnego, które będziemy oznaczać symbolem g. Takie przyspieszenie ma każde ciało, które spada swobodnie w polu grawitacyjnym Ziemi. Jego wartość można oszacować znając masę Ziemi, jej średni promień i stałą grawitacyjną [1]. Bardziej szczegółowe rozważania uwzględniają poprawki do tak uzyskanej wielkości wynikające z ruchu obrotowego Ziemi, wysokości nad poziomem morza, niejednorodności w rozkładzie masy Ziemi, etc. [1].

Przez spadek swobodny rozumiemy ruch odbywający się wyłącznie na skutek działania siły grawitacji. Poza siłą grawitacji, na każde ciało poruszające się w powietrzu, działa również siła oporu. Jej eliminacja jest możliwa poprzez umieszczenie spadającego ciała w komorze próżniowej. W naszym eksperymencie będziemy jednak badać spadek metalowej kulki w powietrzu i założymy, że wpływ oporu powietrza na jej ruch będzie w pierwszym przybliżeniu zaniedbywalny. Takie założenie na pewno staje się poprawne, gdy masa kulki jest duża, a jej promień i prędkość spadania są względnie małe.

Rozważmy teraz spadek swobodny kulki zaczynający się z zerową prędkością początkową w kierunku działania siły grawitacji. Jeśli w czasie jego trwania ciało pokonuje w czasie t drogę h w w/w kierunku, to zachodzi związek [1]

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{1}$$

Korzystając z (1) wyznaczymy na kilka sposobów przyspieszenie grawitacyjne dzięki pomiarowi odległości i czasu spadku. Uzyskane wyniki porównamy do wartości tablicowej równej w przybliżeniu

$$9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{2}$$

w Krakowie [2]. Z szacunków pochodzących ze strony [2] wnioskujemy, że niepewność (2) jest mniejsza niż $10^{-2}\mathrm{m/s}^2$. Będziemy ją zatem pomijać podczas dyskusji naszych wyników, które są obarczone wielokrotnie większą niepewnością.

To wprowadzenie jest niereprezentatywnie krótkie z powodu prostoty omawianego ćwiczenia.

II. OPIS DOŚWIADCZENIA

Układ doświadczalny bazuje na parze fotokomórek zamontowanych na statywie (Rys. 1). Ich odległość w pionie można precyzyjnie zmieniać w zakresie od paru centymetrów do około 80 cm. Fotomokórki są podłączone do miernika, który wyświetla czas jaki upływa między przesłonięciem górnej i dolnej fotokomórki. Czas jest wyświetlany z dokładnością

Rysunek 1: Zdjęcie układu pomiarowego. Fotokomórki są zamontowane w obudowach o kształcie litery `C` i przymocowane do statywu umieszczonego na podłodze. Na stole powyżej nich znajduje się miernik oraz drugi statyw, do którego przymocowany jest bloczek i uchwyt. Ich rola w eksperymencie jest wyjaśniona w rozdziale II.

do tysięcznych części sekundy. Ponieważ nie posiadamy informacji na temat dokładności miernika, będziemy ją pomijać w dalszej dyskusji.

W doświadczeniu badamy czas spadku metalowych kulek między fotokomórkami. Wykonujemy to ćwiczenie w trzech wariantach.

Pomiary przy ustalonej odległości między fotokomórkami. W tym przypadku korzystamy z kulki, która ma przyspawany mały uchwyt do którego przywiązujemy nić. Następnie, korzystając z bloczka przymocowanego do statywu znajdującego się nad fotokomórkami, opuszczamy powoli kulkę na nitce w kierunku górnej fotokomórki obserwując miernik. W momencie, w którym miernik zaczyna mierzyć czas, cofamy minimalnie, czyli o

około 1 mm, kulkę naciągając przymocowaną do niej nitkę. Zerujemy miernik i sprawdzamy, że tak ustawiona kulka go nie uruchamia. Następnie przepalamy zapalniczką nitkę blisko kulki, która spadając uruchamia, a następnie zatrzymuje pomiar czasu jeśli przeleci przez pole widzenia dolnej fotokomórki. Aby tak się stało, oscylacje kulki przed przepaleniem nitki są minimalizowane, aby miała ona prawie zerową prędkość w kierunku poziomym. Pomiary wykonujemy dwudziestokrotnie dla jednej odległości między fotokomórkami. Przed ich wykonaniem justujemy układ: poziomujemy fotokomórki i tak ustawiamy bloczek, aby spadająca kulka przecinała pole widzenia fotokomórek.

Pomiary przy zmiennej odległości między fotokomórkami. Zmieniamy położenie górnej fotokomórki trzymając dolną fotokomórkę na stałej wysokości. Wykonujemy pięć pomiarów dla każdej odległości między fotokomórkami w identyczny sposób jak wyżej opisaliśmy.

Pomiary przy ustalonej odległości między punktem zrzutu a dolną fotokomórką. W tym przypadku kulka spada za każdym razem z tej samej wysokości rozpoczynając ruch wysoko nad górną fotokomórką. Podczas gdy położenie dolnej fotokomórki jest ustalone, położenie górnej jest zmieniane. Dla każdej odległości między fotokomórkami wykonujemy sześć pomiarów. Aby zagwarantować prawie identyczny punkt zrzutu dla wszystkich pomiarów, umieszczamy na stole nad zestawem fotokomórek drugi statyw i mocujemy na nim uchwyt na wysokości wzroku, czyli około 1.5 m nad dolną fotokomórką. Staramy się kulkę zrzucać z tej samej wysokości względem uchwytu. Szacujemy rozrzut początkowego położenia kulki na ± 1 mm w pionie. Układ justujemy tak samo jak wcześniej.

W pierwszych dwóch wariantach ćwiczenia kulka miała średnicę (25.3 ± 0.1) mm i masę (67.51 ± 0.01) g, a w ostatnim miała średnicę (36.4 ± 0.1) mm i masę (196.93 ± 0.01) g (podane niepewności mają charakter systematyczny). Powyższe dane nie będą wykorzystywane do opracowania ćwiczenia, ponieważ nie uwzględniamy oporu powietrza w naszych rozważaniach. Pomiary odległości między fotokomórkami zostały wykonane taśmą mierniczą.

III. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

Obliczenia prezentowane w tym rozdziale zostały wykonane w programie `Mathematica`. W szczególności regresja liniowa została wykonana procedurą `LinearModelFit` w tym programie. Wykresy zostały przygotowane w programie `Xmgrace`.

Pomiary przy ustalonej odległości między fotokomórkami. Przy założeniu, że ruch kulki zaczyna się zaraz nad górną fotokomórką, dostajemy z (1) następujący wynik na przyspieszenie grawitacyjne

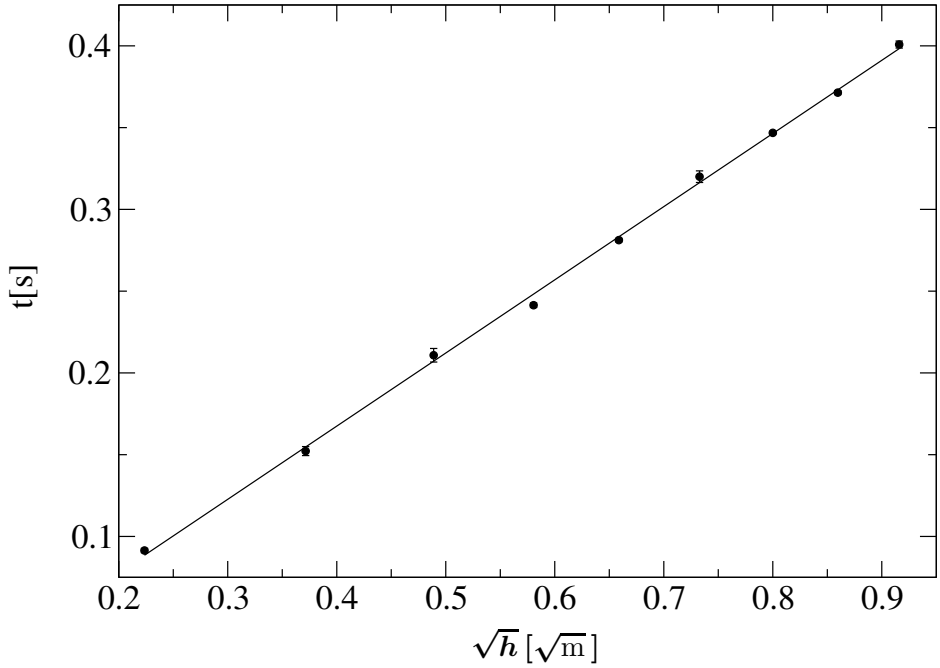
$$g = \frac{2h}{t^2}, \tag{3}$$

gdzie h jest odległością między fotokomórkami a t jest czasem przelotu między nimi. Wykonaliśmy 20 pomiarów czasu przelotu, z których uzyskaliśmy

$$t = \bar{t} \pm \sigma_t = (0.4008 \pm 0.0022)\,\mathrm{s}, \tag{4}$$

gdzie jako niepewność podajemy odchylenie standardowe średniej arytmetycznej. Poza w/w niepewnością statystyczną, mamy jeszcze niepewność systematyczną pomiaru odległości między fotokomórkami. Szacujemy ją na ± 3 mm, co daje nam

$$h = \bar{h} \pm \Delta h = (0.839 \pm 0.003)\,\mathrm{m}. \tag{5}$$



Rysunek 2: Czas przelotu kulki między fotokomórkami w funkcji pierwiastka odległości między nimi. Punkty pokazują uśredniony arytmetycznie dla każdej odległości wynik pomiaru. Linia pochodzi z dopasowania do nich prostej danej równaniem (9). Aby ją otrzymać, wykonaliśmy regresję klasyczną [3]. Jako niepewności punktów na wykresie przyjęliśmy odchylenia standardowe średniej arytmetycznej z pomiarów wykonanych dla każdej odległości. Są one mniejsze niż rozmiar większości punktów na wykresie.

Niepewność statystyczną i systematyczną zmierzonej wartości przyspieszenia grawitacyjnego wyznaczamy ze wzorów

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{t}}\sigma_t\right)^2} = \frac{4\bar{h}}{\bar{t}^3}\sigma_t, \tag{6}$$

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial \bar{h}}\right| \Delta h = \frac{2}{\bar{t}^2}\Delta h, \tag{7}$$

co ostatecznie daje

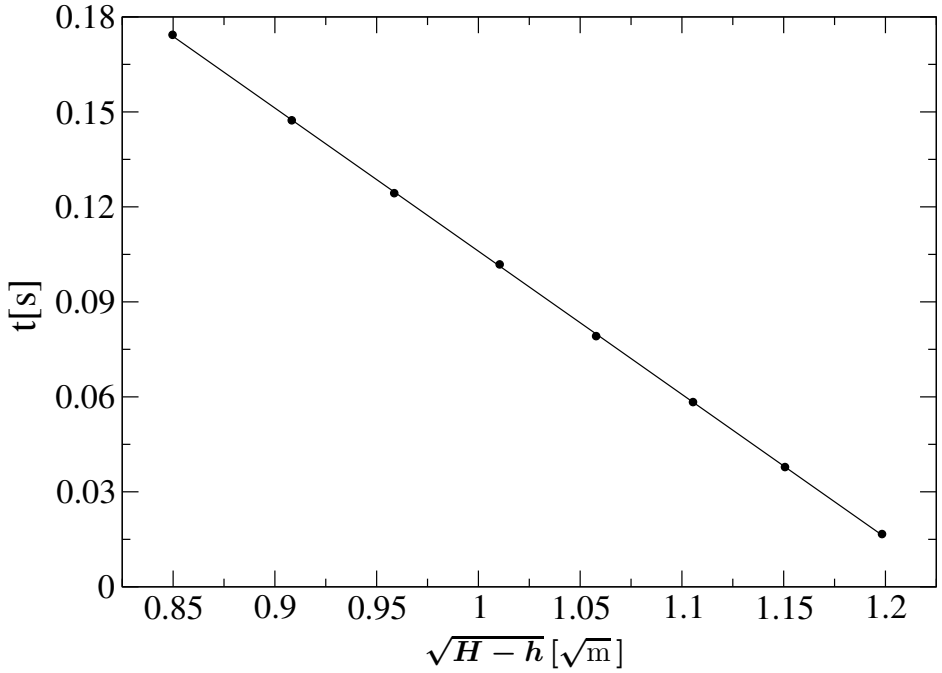
$$g = \bar{g} \pm \sigma_g \pm \Delta g = (10.45 \pm 0.11 \pm 0.04)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{8}$$

Pomiary przy zmiennej odległości między fotokomórkami. Ponownie korzystamy z (1), gdzie h jest odległością między fotokomórkami, a t jest uśrednionym arytmetycznie czasem przelotu. Zakładamy, że ruch kulki zaczyna się zaraz nad górną fotokomórką. Dopasowujemy zatem linię prostą do punktów $(\sqrt{h}, t)$ otrzymując

$$t = a\sqrt{h} + b, \tag{9a}$$

$$a = \bar{a} \pm \sigma_a = (0.447 \pm 0.006)\,\frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{m}}}, \tag{9b}$$

$$b = \bar{b} \pm \sigma_b = (-0.012 \pm 0.004)\,\mathrm{s}. \tag{9c}$$



Rysunek 3: Czas przelotu kulki między fotokomórkami w funkcji pierwiastka odległości między punktem zrzutu, a pierwszą fotokomórką. Punkty pokazują uśredniony arytmetycznie pomiar czasu. Prosta pochodzi z regresji klasycznej, której wynik podajemy w (14). Niepewności punktów, szacowane przez odchylenia standardowe średniej arytmetycznej, są dużo mniejsze niż rozmiar punktów na wykresie.

Punkty pomiarowe i dopasowaną prostą przedstawiamy na Rys. 2. Porównując (9a) z (1) dostajemy

$$g = \frac{2}{a^2}, \tag{10}$$

co pozwala nam na otrzymanie

$$g = \bar{g} \pm \sigma_g = (9.99 \pm 0.26)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \tag{11}$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{a}}\sigma_a\right)^2} = \frac{4}{\bar{a}^3}\sigma_a. \tag{12}$$

Wynik (11) jest w lepszej zgodności z wartością tablicową niż wielokrotny pomiar dla pojedynczej wysokości (8).

Pomiary przy ustalonej odległości między punktem zrzutu a dolną fotokomórką. Spodziewamy się następującej zależności dla uśrednionego arytmetycznie czasu przelotu t między fotokomórkami

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}, \tag{13}$$

gdzie H jest odległością między punktem zrzutu a dolną fotokomórką a h jest odległością między fotokomórkami.

Powyższy wzór można uzasadnić zauważając, że $\sqrt{2H/g}$ jest czasem przelotu kulki między punktem zrzutu a dolną fotokomórką, natomiast $\sqrt{2(H-h)/g}$ jest czasem spadku od punktu zrzutu do górnej fotokomórki.

Odległość między punktem zrzutu a górną fotokomórką, $H - h$, nie mierzymy bezpośrednio gdyż jest to uciążliwe. Dlatego dopasowujemy prostą do punktów $(\sqrt{H-h}, t)$ dostając

$$t = c\sqrt{H-h} + d, \tag{14a}$$

$$c = \bar{c} \pm \sigma_c = (-0.4522 \pm 0.0014)\,\frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{m}}}, \tag{14b}$$

$$d = \bar{d} \pm \sigma_d = (0.5582 \pm 0.0014)\,\mathrm{s}. \tag{14c}$$

Tę prostą wraz z wynikami pomiarów przedstawiamy na Rys. 3. Z porównania (13) i (14a) dostajemy

$$g = \frac{2}{c^2} \tag{15}$$

i z tej zależności wyznaczamy przyspieszenie grawitacyjne

$$g = \bar{g} \pm \sigma_g = (9.78 \pm 0.06)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \tag{16}$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{c}}\sigma_c\right)^2} = \frac{4}{|\bar{c}|^3}\sigma_c. \tag{17}$$

Przyspieszenie grawitacyjne można też wyznaczyć z wyrazu wolnego. Porównując (13) i (14a) dostajemy

$$g = \frac{2H}{d^2}, \tag{18}$$

co prowadzi do

$$g = \bar{g} \pm \sigma_g \pm \Delta g = (9.78 \pm 0.05 \pm 0.02)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \tag{19}$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{d}}\sigma_d\right)^2} = \frac{4\bar{H}}{\bar{d}^3}\sigma_d, \tag{20}$$

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial \bar{H}}\right| \Delta H = \frac{2}{\bar{d}^2}\Delta H. \tag{21}$$

Do opracowania tych wyników potrzebowaliśmy odległość między punktem zrzutu a dolną fotokomórką

$$H = \bar{H} \pm \Delta H = (1.523 \pm 0.003)\,\mathrm{m}. \tag{22}$$

Wyniki (16) i (19) są ze sobą zgodne.

IV. DYSKUSJA

Patrząc na wyniki (8), (11), (16) i (19) zauważamy następujące problemy wymagające głębszej analizy

- wynik (8) istotnie przeszacowuje wartość przyspieszenia grawitacyjnego,
- pomiary prowadzące do (11) są zdecydowanie mniej dokładne niż te prowadzące do wyników (16) i (19). Ponadto wyraz wolny z dopasowania prowadzącego do (11) znika dopiero w granicy trzech odchyleń standardowych (9c).

Wynik (8) jest o około 6.5% za duży i nawet po uwzględnieniu niepewności pomiarowych istotnie odbiega od wartości tablicowej. W/w stwierdzenie można uzasadnić konwertując niepewność statystyczną i systematyczną do całkowitej niepewności statystycznej, którą można oszacować poprzez [3]

$$\tilde{\sigma}_g = \sqrt{\sigma_g^2 + \left(\frac{\Delta g}{\sqrt{3}}\right)^2} \approx 0.11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{23}$$

Zauważamy teraz, że różnica między (2) i (8) wynosi prawie $6\tilde{\sigma}_g$, co oznacza, że jest nieprawdopodobne, aby te wyniki były ze sobą zgodne. To z kolei sugeruje, że istnieje nieuwzględniony w naszej analizie czynnik prowadzący do przeszacowania przyspieszenia grawitacyjnego w tych pomiarach.

Aby go zidentyfikować, zauważamy, że kulka zawsze startuje trochę powyżej górnej fotokomórki, powiedzmy ϵ ponad nią. Korzystając ze wzoru (13), gdzie podstawiamy $H = h + \epsilon$ dostajemy

$$t = \sqrt{\frac{2(h+\epsilon)}{g}} - \sqrt{\frac{2\epsilon}{g}}. \tag{24}$$

Biorąc pod uwagę sposób wykonania ćwiczenia, szacujemy, że ϵ powinien być rzędu 1mm. Oznacza to, że $h + \epsilon$ możemy przybliżyć przez h, ponieważ stosunek tych dwóch wielkości jest rzędu 1/1000

$$h + \epsilon = h\left(1 + \frac{\epsilon}{h}\right) \approx h. \tag{25}$$

Nie możemy natomiast pominąć drugiego wyrazu zawierającego ϵ, co łatwo widać jeśli porównamy

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 1\mathrm{mm}}{g}} \approx 0.014\,\mathrm{s}, \tag{26}$$

do czasu spadania kulki (4): stosunek tych dwóch wielkości wynosi 3.5% i jest wystarczająco duży aby wyjaśnić rozbieżność między wynikiem (8) a wartością tablicową (2). Aby oszacować wartość ϵ w naszym eksperymencie, wstawiamy (25) do (24), przekształcamy uzyskany wynik do postaci

$$\epsilon = \frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - t\right)^2, \tag{27}$$

podstawiamy za g wartość (2) i korzystamy z (4) i (5). Otrzymujemy

$$\epsilon = \bar{\epsilon} \pm \sigma_\epsilon \pm \Delta\epsilon = (0.8 \pm 0.3 \pm 0.1)\,\mathrm{mm}, \tag{28}$$

$$\sigma_\epsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \bar{t}}\sigma_t\right)^2} = \left|\sqrt{2\bar{h}g} - g\bar{t}\right|\sigma_t, \tag{29}$$

$$\Delta\epsilon = \left|\frac{\partial \epsilon}{\partial \bar{h}}\right|\Delta h = \left|1 - \sqrt{\frac{g}{2\bar{h}}}\bar{t}\right|\Delta h. \tag{30}$$

Wniosek z tych rachunków jest następujący. Aby wytłumaczyć rozbieżność między (2) i (8) wystarczy przyjąć, że różnica odległości między górną fotokomórką i początkowym położeniem kulki wynosi około 0.8 mm.

Wartość ϵ możemy niezależnie wyznaczyć z dopasowania prostej (9). Porównując (9a) z (24), po uwzględnieniu przybliżenia (25), widzimy, że $b = -a\sqrt{\epsilon}$, czyli

$$\epsilon = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \tag{31}$$

co pozwala nam uzyskać

$$\epsilon = \bar{\epsilon} \pm \sigma_\epsilon = (0.66 \pm 0.44)\,\mathrm{mm}, \tag{32}$$

$$\sigma_\epsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\bar{a}}\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\bar{b}}\sigma_b\right)^2} = \frac{2\bar{b}^2}{\bar{a}^2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{\bar{b}}\right)^2}. \tag{33}$$

Wynik (32) jest zgodny z oszacowaniem (28).

Warto też zauważyć, że wielkość

$$\sqrt{\frac{2\epsilon}{g}} \tag{34}$$

można traktować jako "systematyczne" przesunięcie czasu przelotu, które jest gubione przy założeniu, że kulka rozpoczyna ruch idealnie nad górną fotokomórką. Nie jest ono zaniedbywalne, ponieważ, potocznie mówiąc, pierwiastek "powiększa" małą wielkość.

Ponadto możemy teraz łatwo zrozumieć, dlaczego wyniki pomiarowe prezentowane na Rys. 3 tak dobrze układają się na dopasowanej prostej. W tym przypadku położenie początkowe kulki też fluktuuje o około 1 mm w pionie, ale teraz ta fluktuacja pojawia się jako poprawka do H i $H - h$ w (13) będących rzędu 1m, a zatem podobnie jak w (25) jest ona zaniedbywalna.

Podsumowując, omawiany eksperyment został wykonany w trzech wersjach. Uzyskane wyniki różnią się dokładnością wyznaczenia wartości przyspieszenia grawitacyjnego. Najdokładniejszy z nich daje nam poprawną wartość przyspieszenia grawitacyjnego z niepewnością względną 0.6% liczoną jako stosunek odchylenia standardowego wyniku do jego wartości. Pozostałe dwa wyniki są istotnie mniej dokładne, co zostało przez nas szczegółowo wytłumaczone.

[1] D. Halliday i R. Resnick, Fizyka, tom 1 (PWN, 1983).
[2] Physikalisch-Technische Bundesanstalt, https://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php.
[3] A. Magiera, I Pracownia Fizyczna (IFUJ, 2007).