

Wahadło fizyczne (M5)

I. Wstęp teoretyczny

Wahadłem fizycznym nazywamy bryłę sztywną, której ruch w polu grawitacyjnym odbywa się dookoła ustalonej osi nie przechodzącej przez środek masy. Celem ćwiczenia jest zbadanie jak okres drgań wahadła fizycznego zależy od amplitudy drgań oraz sprawdzenie zasady zachowania energii podczas ruchu wahadła.

Zagadnienia do przygotowania: wahadło fizyczne, oscylator harmoniczny, oscylator anharmoniczny [1].

Równanie ruchu wahadła fizycznego ma postać

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\ell \sin \theta, \quad (1)$$

gdzie J jest momentem bezwładności wahadła względem osi obrotu, θ jest wychyleniem wahadła z położenia równowagi, m jest masą wahadła, g jest przyspieszeniem grawitacyjnym a ℓ jest odległością środka masy od osi obrotu (rysunek 1). Równanie (1) dobrze opisuje ruch wahadła tak długo jak straty energii na skutek tarcia są zaniedbywalnie małe.

Bilans energii. Równanie (1) można również zapisać w postaci

$$\frac{1}{2}J \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mg\ell(1 - \cos \theta) = \text{const} \quad (2)$$

pokazującej, że suma energii kinetycznej ruchu obrotowego wahadła i jego energii potencjalnej w polu grawitacyjnym jest niezmienna podczas ruchu wahadła. Proszę sprawdzić, że różniczkując po czasie równanie (2) dostajemy równanie (1).

Drgania harmoniczne zachodzą dla małych wychyleń wahadła, czyli wtedy, gdy możemy skorzystać z przybliżenia

$$\sin \theta \approx \theta$$

we wzorze (1)

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\ell\theta. \quad (3)$$

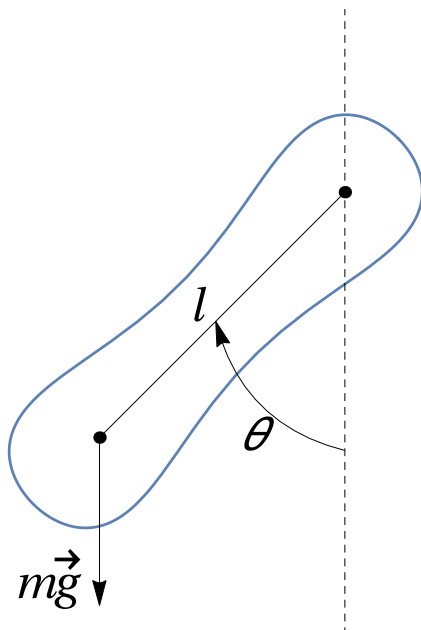
Równanie (3) jest dobrze znane: opisuje ono ruch oscylatora harmonicznego. Jego rozwiązanie ma postać

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J}} \quad (4)$$

jeśli założymy, że w chwili początkowej $t = 0$ wahadło zostało wychylone z położenia równowagi o kąt θ_0 i rozpoczęło ruch z zerową prędkością kątową. Okres takich drgań wynosi

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (5)$$

i jest *niezależny* od amplitudy drgań θ_0 .



Rysunek 1: Wahadło fizyczne.

Drgania anharmoniczne pojawiają się, gdy zależność okresu drgań od ich amplitudy nie jest zaniedbywalna. Przyjmując takie same warunki początkowe jak dla rozwiązania (4), dostajemy z równania (2)

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0). \quad (6)$$

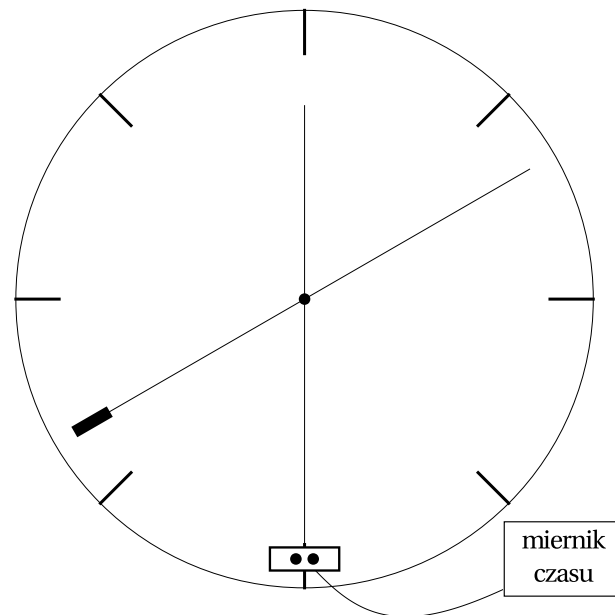
Zauważamy następnie, że wahadło przechodzi od kąta 0 (położenie równowagi) do θ_0 (maksymalne wychylenie) w czasie $T/4$, gdzie T jest okresem jego ruchu. Korzystając z tej uwagi dostajemy z równania (6) następujący związek między okresem i amplitudą drgań wahadła

$$\begin{aligned} T &= T_0 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \\ &= T_0 \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right) \\ &= T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \frac{173}{737280} \theta_0^6 + \dots \right) \end{aligned}$$

Dla niezbyt dużych wychyleń przybliżamy wzór na okres drgań wahadła

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right), \quad (7)$$

gdzie θ_0 jest wyrażone w radianach. Ten wzór porównamy do wyników pomiarów. Warto się zastanowić przed wykonaniem ćwiczenia dla jakich początkowych wychyleń przybliżenie (7) jest uzasadnione. Dlaczego nie ma w tym wzorze członu liniowo zależnego od θ_0 ?



Rysunek 2: Układ pomiarowy.

II. Przebieg pomiarów

Schemat układu pomiarowego przedstawia rysunek 2. Położenie początkowe wahadła jest odczytywane na skali kątowej. Okres ruchu oraz czas przelotu są rejestrowane przez układ fotokomórek połączonych z miernikiem czasu.

Zależność okresu od amplitudy. Umieszczamy fotokomórki w położeniu równowagi wahadła i mierzymy okres ruchu wahadła dla różnych wychyleń początkowych θ_0 . Szczególny nacisk kładziemy na pomiary dla $\theta_0 < 1$ rad, ponieważ dla tych kątów będziemy sprawdzali kwadratową poprawkę do okresu drgań (7). Dla każdego wychylenia mierzymy okres drgań wiele razy. Aby zminimalizować wpływ tarcia mierzymy okres ruchu wahadła podczas pierwszego drgania.

Bilans energetyczny. Ustawiamy fotokomórki w położeniu równowagi wahadła i mierzymy czas przelotu wahadła między fotokomórkami dla różnych wychyleń początkowych θ_0 . Podobnie jak wcześniej, dokonujemy wielokrotnego pomiaru dla każdego wychylenia.

W celu wyznaczenia prędkości kątowej wahadła (11) mierzymy odległość R fotokomórek od osi obrotu i odległość S między fotokomórkami (w zestawie z jedną fotokomórką mierzymy suwmiarką grubość tej części wahadła, która przesłania fotokomórkę). Jeśli przez $\Delta\theta$ oznaczymy kąt zakreślany przez wahadło podczas pomiaru czasu przelotu, to z prostych rozważań trygonometrycznych dostajemy

$$\Delta\theta \approx \frac{S}{R}. \quad (8)$$

Jaka jest interpretacja geometryczna i zakres stosowalności tego wzoru?

III. Opracowanie wyników

Zależność okresu od amplitudy. Pomiaru okresu drgań dla każdego wychylenia uśredniamy. Następnie wykreślamy okres drgań T w funkcji kwadratu początkowego wychylenia θ_0^2 . Do wyników dla kątów mniejszych od 1 radiana dopasowujemy prostą

$$T = A\theta_0^2 + B. \quad (9)$$

Porównując tę zależność do wzoru (7) identyfikujemy współczynnik B z okresem drgań harmonicznym T_0 , a współczynnik A z $T_0/16$. Sprawdzamy następnie czy w granicy niepewności pomiarowej $B/A = 16$. Porównując dopasowaną prostą do wyników pomiarów dla wszystkich początkowych wychyleń (nie tylko do tych wykorzystanych do wyznaczenia współczynników A i B) ustalamy zakres kątów dla których kwadratowa w wychyleniu poprawka do okresu ruchu jest wystarczająca.

Bilans energetyczny. Uśredniamy czasy przelotu Δt dla tych samych wychyleń początkowych θ_0 i wykreślamy $(1/\Delta t)^2$ w funkcji $1 - \cos \theta_0$. Do wyników dopasowujemy prostą

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 = C(1 - \cos \theta_0) + D. \quad (10)$$

Następnie zapisujemy prędkość kątową jako

$$\frac{d\theta}{dt} \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (11)$$

gdzie $\Delta\theta$ jest kątem zakreślonym przez wahadło w czasie Δt . Podstawiamy $\theta = 0$ (opisujące położenie fotokomórek) i wzór (11) do równania (6). Porównując uzyskany wynik do równania (10) dowiadujemy się, że

$$C = \frac{2\omega_0^2}{(\Delta\theta)^2} \quad (12)$$

jeśli tarcie rzeczywiście jest zaniedbywalne podczas omawianych pomiarów. Znając współczynnik C z dopasowania (10) oraz okres drgań harmonicznym (5) z dopasowania (9) wyznaczamy $\Delta\theta$ ze wzoru (12).

Następnie porównujemy ten wynik do kąta $\Delta\theta$ wyznaczonego bezpośrednio ze wzoru (8). W porównaniu uwzględniamy niepewności wyznaczenia tego kąta w obydwu przypadkach i dyskutujemy *jakościowo* wpływ tarcia na uzyskany wynik.

[1] <http://pl.wikipedia.org/wiki/Wahadło>, [http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics)).