POCHODNE

dr Sławomir Brzezowski

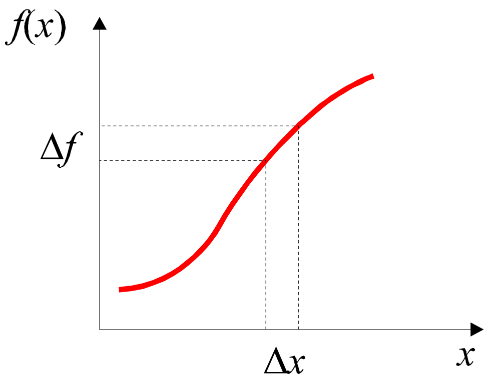
Instytut Fizyki im. Mariana Smoluchowskiego
Uniwersytet Jagielloński

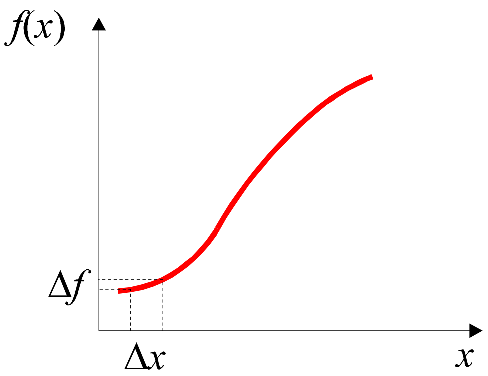
Zawarte w tym opracowaniu materiały przeznaczone są do wspomagania pracy studentów w czasie zajęć laboratoryjnych w I Pracowni Fizycznej IF UJ.

Bez pojęcia pochodnej nie da się uprawiać fizyki, z czego przyrodnicy zdali sobie sprawę już w wieku XVII – tak więc można powiedzieć, że jest to temat bardzo stary. Niżej znajdą Państwo krótki, wykład o pochodnych. Pochodna przedstawiona jest poglądowo; za kilka miesięcy Wasz wykladowca matematyki zapewne przedstawi to zagadnienie bardziej eleganckim językiem.

Wyobraźmy sobie funkcję $f(x)$, którą da się opisać gładkim wykresem. Pod pojęciem „gładki" przyjmiemy prowizorycznie wykres o „płynnych zakrętach", pozbawiony ostrych załamań (bo matematycy ujmują to inaczej).

Spróbujmy teraz zdefiniować jakąś wielkość, która będzie zdawała sprawę z szybkości zmieniania się wartości funkcji $f(x)$, gdy zmienia się x. Przesuwamy się więc wzdłuż osi x o niewielki odcinek Δx i obserwujemy, jak zmienia się wartość funkcji. Niech przyrost funkcji nad odcinkiem Δx wyniesie Δf.



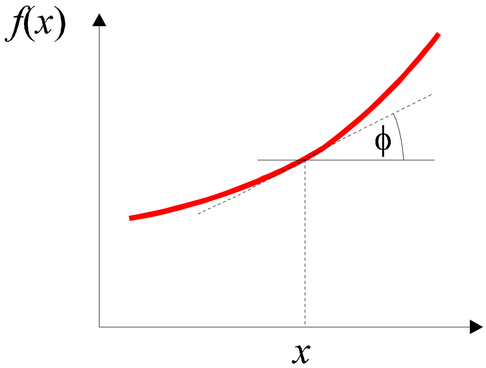


Na podstawie rysunków możemy stwierdzić, że iloraz $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ jest duży tam, gdy wykres funkcji stromo się podnosi (lewy rysunek), i jest mały w tych okolicach osi x, gdzie wykres jest prawie poziomy (prawy rysunek). Chcąc uchwycić ilościowo nachylenie wykresu nad wybranym punktem x, należy obliczyć wielkość $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ dla bardzo małego przedziału Δx zawierającego punkt x, a najlepiej rozważyć granicę

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx}.$$

Symbol $\frac{df}{dx}$ po prawej stronie ostatniej równości jest uzasadnionym umownym znakiem drukarskim zastępującym pełny zapis granicy ilorazu $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, stojący po stronie lewej: w rachunku różniczkowym, którego elementy tu poznajemy, symbol „d" umieszczony przed dowolną wielkością oznacza bowiem nieskończenie mały przyrost tej wielkości. Występującą w definicji pochodnej wielkość $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ nazwano **ilorazem różnicowym**. Zamiast symbolu $\frac{df}{dx}$ używa się często zapisu f'.

Oczywiście przejście graniczne $\Delta x \to 0$ wykonać należy w ten sposób, aby zmierzający do zera przedział Δx wciąż zawierał w sobie punkt x. Można się na przykład umówić, aby przedział Δx rozciągał się od punktu x do punktu $x + \Delta x$. Rozważając (w wyobraźni) coraz mniejsze przedziały Δx, zrozumiemy, że szukana granica równa jest tangensowi kąta φ nachylenia stycznej do wykresu funkcji nad punktem x (rysunek poniżej).



Rozważaną tu granicę $\frac{df}{dx}$ nazywamy **pochodną funkcji** $f(x)$ **po zmiennej** x. Pochodna funkcji f też jest funkcją zmiennej x, co łatwo stwierdzić patrząc na rysunek: nachylenie wykresu nad punktem x zależy od wyboru tego punktu.

Zanim udowodnimy kilka pożytecznych twierdzeń pomocnych w obliczaniu pochodnych, znajdziemy pochodne kilku prostych funkcji.

Zacznijmy od funkcji stałej:

$$f(x) = C\,.$$

Wykres tej funkcji jest oczywiście prostą linią poziomą. Kąt φ wynosi więc w tym wypadku zero (dla każdej wartości x), czyli pochodna ze stałej wynosi zero (bo $tg0 = 0$).

Obliczmy teraz **pochodną funkcji liniowej**

$$f(x) = ax + b\,.$$

Wykres funkcji jest w tym przypadku linią prostą (zwykle nachyloną). Kąt nachylenia stycznej do wykresu tej funkcji (styczna pokrywa się tu z wykresem funkcji) jest wszędzie taki sam i jego tangens – jak wiemy ze szkoły – wynosi a. Już tylko dla ćwiczenia obliczamy:

$$\frac{d(ax+b)}{dx} \equiv (ax+b)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[a(x+\Delta x)+b]-[ax+b]}{\Delta x} = a\,.$$

W szczególności dla funkcji $f(x) = x$ otrzymamy $\frac{df}{dx} = x' = 1$.

Obliczmy jeszcze pochodną z funkcji x^2:

$$\frac{d(x^2)}{dx} \equiv (x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x - \Delta x) = 2x$$

i **pochodną dowolnej potęgi** $f(x) = x^n$ dla naturalnego wykładnika n:

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \Delta^2 - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}\,.$$

Umownym symbolem Δ^2 oznaczyliśmy sumę wszystkich składników wyrażenia $(x+\Delta x)^n$, oprócz dwóch jawnie wypisanych. Obliczając iloczyn

$$(x+\Delta x)^n = (x+\Delta x)(x+\Delta x)\ldots(x+\Delta x)$$

łatwo się przekonać, że składniki wyrażenia Δ^2 są proporcjonalne do przyrostu Δx podniesionego do drugiej lub wyższej potęgi, co prowadzi do powyższego wyniku. Można pokazać, że wyprowadzony przez nas wzór

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

jest prawdziwy dla dowolnych (niekoniecznie naturalnych) liczb n, czyli na przykład

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\,.$$

Na koniec obliczymy **pochodne funkcji sinus i kosinus**:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}-\sin x\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}\right].$$

Musimy więc zbadać dwie granice:

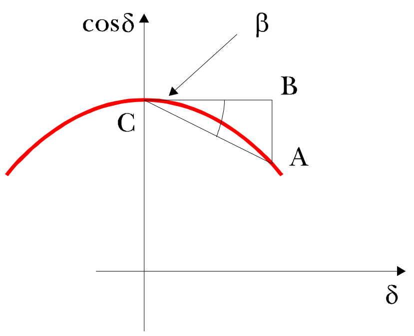
$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\sin\delta}{\delta} \quad \text{oraz} \quad \lim_{\delta\to 0}\frac{1-\cos\delta}{\delta}\,.$$

Zacznijmy od tej pierwszej. Jak wiadomo, dla małego kąta δ jego sinus upodabnia się do samego kąta wyrażonego w mierze łukowej. Dlatego

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\sin\delta}{\delta} = 1\,.$$

Dla obliczenia drugiej granicy posłużymy się rysunkiem, na którym pokazano fragment wykresu funkcji $\cos\delta$ w okolicy punktu $\delta = 0$. Szukamy granicy stosunku długości dwóch odcinków

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{AB}{BC} = \lim_{\beta\to 0}\mathrm{tg}\beta = 0\,.$$



Ostatecznie mamy więc:

$$(\sin x)' = \cos x\,.$$

Podobne rozumowanie prowadzi do wzoru

$$(\cos x)' = -\sin x\,.$$

Pominiemy wyprowadzenia następujących pochodnych:

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a\,,$$

$$\left(x^x\right)' = x^x(\ln x + 1)\,,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\,.$$

Przejdźmy teraz do funkcji bardziej skomplikowanych. Okazuje się, że obliczanie pochodnych takich funkcji możliwe jest po udowodnieniu dodatkowych trzech ogólnych wzorów.

1. **Pochodna sumy funkcji** jest sumą pochodnych tych funkcji

$$\left(f + g\right)' = f' + g'\,.$$

Dowód:

Obliczamy granicę ilorazu różnicowego

$$\frac{d\left(f+g\right)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)\right] - \left[f(x) + g(x)\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}\,,$$

c.b.d.o.

2. **Pochodna iloczynu funkcji** ma postać (tzw. **wzór Leibniza**)

$$\left[f(x)g(x)\right]' = f'g + fg'\,.$$

Dowód:

Badamy granicę ilorazu różnicowego

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \left|\begin{array}{c}\text{w liczniku}\\ \text{dodajemy zero}\end{array}\right|$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}\,,$$

c.b.d.o.

3. **Pochodna funkcji złożonej**. (Przykład: funkcja $\sin\left(x^2\right)$ jest złożeniem funkcji potęgowej $g(x) = x^2$ z funkcją $f\left(g\right) = \sin g$)

$$[f(g(x))]' = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}.$$

Dowód:

Obliczamy granicę

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta g}\frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta g\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta g}\lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx},$$

c.b.d.o.

(Na przykład $\left[\sin\left(x^2\right)\right]' = \left[\cos\left(x^2\right)\right][2x] = 2x\cos\left(x^2\right)$) .

Korzystając z wyżej wyprowadzonych wzorów można latwo pokazać, że

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Wystarczy potraktować ułamek po lewej stronie jako iloczyn dwóch funkcji: funkcji $f(x)$ i funkcji $\frac{1}{g(x)}$, z zastosowaniem zasad rożniczkowania funkcji złożonej w odniesieniu do funkcji $(g(x))^{-1}$.

Jako ćwiczenie należy napisac sobie kilka coraz bardziej skomplikowanych funkcji i obliczyć ich pochodne. Okaze się, że kilka podanych tu wzorow wystarczy do obliczenia pochodnej każdej funkcji.

Przyklad:

Obliczamy pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{2+\sin^2 x}a^x$. Na wstępie analizujemy strukturę funkcji. Mamu tu iloczyn dwóch funkcji (tego ułamka i funkcji wykładniczej), a sam ułamek jest funkcją złożoną. Przystępujemy do różniczkowania. Do iloczynu stosujemy wzor Leibnitza:

$\frac{df}{dx} \equiv f' = \left(\frac{1}{2+\sin^2 x}\right)' a^x + \frac{1}{2+\sin^2 x}\left(a^x\right)'$. W pierwszym składniku pozostało doliczyć pochodną $\left(\frac{1}{2+\sin^2 x}\right)'$, w drugim – pochodną $\left(a^x\right)'$.

Na tę drugą znajdziemy wyżej gotowy przepis $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.

Pozostaje obliczyć pochodną $\left(\frac{1}{2+\sin^2 x}\right)'$, czyli $\left(\left(2+\sin^2 x\right)^{-1}\right)'$. Mamy tu funkcję złożoną. Najbardziej „zewnętrzną” funcją jest podnoszenie do potęgi -1, tak więc:

$$\left(\left(2+\sin^2 x\right)^{-1}\right)' = (-1)\left(2+\sin^2 x\right)^{-2}\left(2+\sin^2 x\right)'.$$

Pozostaje obliczyć pochodną $\left(2+\sin^2 x\right)'$. Mamy tu sumę dwóch funcji: jedna jest stałą (ta dwójka), druga – kwadratem sinusa. Jak już wiemy, pochodna sumy funkcji jest sumą pochodnych:

$$\left(2+\sin^2 x\right)' = 2' + \left(\sin^2 x\right)'$$

Pierwsza z tych pochodnych wynosi zero, druga jest znowu pochodną funkcji złożonej. Najbardziej zewnętrzne jest podnoszenie do kwadratu, czyli

$$\left(\sin^2 x\right)' = 2(\sin x)^1(\sin x)' = 2\sin x\cos x .$$

Wystarczy teraz wszystko podstawić na swoje miejsce:

$$\frac{df}{dx} \equiv f' = (-1)\left(2+\sin^2 x\right)^{-2}(2\sin x\cos x)a^x + \frac{1}{2+\sin^2 x}a^x \ln a .$$

Jak to zwykle bywa przy różniczkowaniu, taki „surowy" wzór na pochodną funkcji wyjściowej, może być przekształcony do bardziej czytelnej postaci. W tym przypadku możemy go na przykład zapisać tak:

$$\frac{df}{dx} \equiv f' = a^x\left[\frac{\ln a}{2+\sin^2 x} - \frac{\sin 2x}{\left(2+\sin^2 x\right)^2}\right].$$

Mając pochodną funkcji możemy łatwo obliczyć jej przyrost (różniczkę) df, gdy zmienna x rośnie od jakiejś wartości x do $x+dx$:

$$df = \frac{df}{dx}dx$$ (wartość pochodnej w punkcie x pomnożona przez przyrost dx).

Dla małego (ale nie nieskończenie małego) przyrostu Δx podobny wzór na przyrost funkcji:

$$\Delta f = \frac{df}{dx}\Delta x$$

daje oczywiście wynik przybliżony.

W przypadku funkcji wielu zmiennych $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ zmianę wartości funkcji, wywołaną przez przejście od kompletu wartości zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$ do wartości zmienionych $\left(x_1+dx_1\right), \left(x_2+dx_2\right), ..., \left(x_n+dx_n\right)$, oblicza się w zaskakujaco prosty sposób. Obliczamy pochodną tej funkcji po zmiennej x_1 (traktując pozostałe zmienne, jak stałe – jest to tak zwana pochodna cząstkowa po zmiennej x_1, oznaczana symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_1}$) i tak obliczoną pochodną (wzięta w punkcie $x_1, x_2, ..., x_n$) mnożymy przez przyrost dx_1, do tego dodajemy $\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$ i tak dalej, czyli

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + .. + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n .$$

Tak więc jeżeli na przykład chcemy wyliczyć zmianę objętości walca $V(r,h)=\pi r^2 h$, gdy promień podstawy zmieni się o dr, a wysokość o dh, to

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = (2\pi rh)dr + (\pi r^2)dh \, .$$

Dla przyrostów małych, ale nie nieskończenie małych, odpowiedni wzór

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h = (2\pi rh)\Delta r + (\pi r^2)\Delta h$$

daje wynik przybliżony.