

# WSTĘP DO ANALIZY I REDUKCJI DANYCH DOŚWIADCZALNYCH

dla studentów w I Pracowni Fizycznej IF UJ

*Józef K. Mościcki*

(z ChiWritera na MS Worda przeniósł Wojciech Brzezicki®2012)

(Wersja 2011)

**Zestawienie najważniejszych terminów i wzorów**

## **1. ZAMIAST WSTĘPU.**

## **2. ANALIZA BŁĘDÓW PRZYPADKOWYCH.**

### **2.1. Pomiary Bezpośrednie.**

2.1.1. *Populacja pierwotna.*

2.1.2. *Parametry charakteryzujące szerokość rozkładu.*

2.1.3. *Interpretacja parametrów rozkładu.*

2.1.4. *Estymacja rozkładu pierwotnego na podstawie próby.*

2.1.5. *Rozkład prawdopodobieństwa Gaussa (rozkład normalny błędów).*

2.1.6. *Estymacje wartości średniej i błędu jej wyznaczenia.*

### **2.2. Pomiary pośrednie.**

2.2.1. *Propagacja błędów.*

2.2.2. *Badanie związków funkcyjnych między wielkościami mierzonymi bezpośrednio.*

(a) *Niepewności pomiarów bezpośrednich.*

(b) *Metoda Najmniejszych Kwadratów, (MHK).*

(c) *Kalibracja układu pomiarowego.*

**Dodatek: KILKA UWAG NA TEMAT WYKONYWANIA POMIAROW I OPRACOWYWANIA WYNIKÓW.**

## Populacja pierwotna

Mediana  $\mu_{1/2}$ -

$$P(x_i \leq \mu_{1/2}) = P(x_i \geq \mu_{1/2}) = 1/2$$

Wartość modalna  $\mu_m$ -

$$P(\mu_m) \geq P(x_i \neq \mu_m)$$

Wartość średnia  $\mu$ -

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i x_i$$

Średnie odchylenie  $\alpha$ -

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i |x_i - \mu|$$

Wariancja  $\sigma^2$ -

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \mu)^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i x_i^2 - \mu^2$$

Odchylenie standardowe  $\sigma$ -

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

## Próba

Wartość średnia próby  $\langle x \rangle$  -

$$\langle x \rangle = \frac{\sum x_i / s_i^2}{\sum 1/s_i^2} \xrightarrow{s_i=s} \frac{1}{N} \sum_i x_i$$

Wariancja próby  $s^2$ -

$$s^2 = \frac{N}{N-1} \frac{\sum (x_i - x)^2 / s_i^2}{\sum 1/s_i^2} \xrightarrow{s_i=s} \frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - x)^2$$

Odchylenie standardowe próby  $s$ -

$$s = \sqrt{s^2} \quad (\text{średni błąd kwadratowy})$$

Wariancja wartości średniej  $s_x^2$  -

$$s_x^2 = \frac{1}{\sum (1/s_i^2)} \xrightarrow{s_i=s} \frac{s^2}{N}$$

Odchylenie standardowe wartości średniej  $s_x$  -

$$s_x = \sqrt{s_x^2} \quad (\text{średni błąd kwadratowy średniej})$$

Rozkład Gaussa  
(rozkład normalny)-

$$P_G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

szerokość połówkowa  $\Gamma = 2.354\sigma \cong \frac{7}{3}\sigma$

błąd prawdopodobny  $\Delta = .6745\sigma \cong \frac{2}{3}\sigma$

Rozkład Studenta

$$P_S(x; \nu) = \frac{\Gamma\{(\nu+1)/2\}}{\Gamma\{\nu/2\} \sqrt{\nu}} \left( 1 + \frac{x^2}{\nu} \right)^{-(\nu+1)/2}$$

## Metoda najmniejszych kwadratów (MNK)

Funkcja liniowa-

funkcja wiążąca dowolne zmienne  $x$  i  $y$  relacją

$$y(x) = \alpha + \beta x$$

wartości parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  są charakterystyczne dla związku między wielkościami  $x$  i  $y$ .

Suma ważona kwadratów odchyłeń  $\chi^2$  -

$$\chi^2 = \sum_i \frac{1}{s_i^2} (y_i - a - bx_i)^2$$

Metoda najmniejszych kwadratów-

minimalizowanie sumy  $\chi^2$  ze względu na parametry  $a$  i  $b$  równocześnie.

Współczynniki dopasowania MNK do prostej  $y = ax + b$ :

$$a = \frac{1}{w} \left[ \sum_i \frac{x_i^2}{s_i^2} \sum_i \frac{y_i^2}{s_i^2} - \sum_i \frac{x_i}{s_i^2} \sum_i \frac{x_i y_i}{s_i^2} \right] \xrightarrow{s_i=s} \frac{1}{w_0} \left[ \sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i \right]$$

$$b = \frac{1}{w} \left[ \sum_i \frac{1}{s_i^2} \sum_i \frac{x_i y_i}{s_i^2} - \sum_i \frac{x_i}{s_i^2} \sum_i \frac{y_i}{s_i^2} \right] \xrightarrow{s_i=s} \frac{1}{w_0} \left[ N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i \right]$$

$$w = \sum_i \frac{1}{s_i^2} \sum_i \frac{x_i^2}{s_i^2} - \left[ \sum_i \frac{x_i}{s_i^2} \right]^2 \xrightarrow{s_i=s} w_0 = N \sum_i x_i^2 - \left( \sum_i x_i \right)^2$$

Estymata wariancji w MNK dla  $s_i^2 = s^2$ :

$$s = \frac{1}{N-2} \sum_i (y_i - a - bx_i)^2$$

Niepewność wyznaczenia współczynników dopasowania MNK:

$$s_a^2 = \frac{1}{w} \sum_i \frac{x_i^2}{s_i^2} \xrightarrow{s_i=s} \frac{s^2}{w_0} \sum_i x_i^2$$

$$s_b^2 = \frac{1}{w} \sum_i \frac{1}{s_i^2} \xrightarrow{s_i=s} \frac{s^2}{w_0} N$$

Niepewność kalibracji liniowej MNK:

$$s_y^2(x) = \frac{1}{w} \sum_i (x - x_i)^2 \xrightarrow{s_i=s} s^2 \left[ \frac{1}{N} + \frac{(x - x_i)^2}{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2} \right]$$

## 1. ZAMIAST WSTĘPU.

Większość użytkowników niniejszego pracownia ma zapewne doświadczenie w wykonywaniu elementarnych pomiarów lub badań zjawisk fizycznych, wyniesione ze szkoły średniej. Zdaje więc sobie sprawę z tego, że wyniki pomiarów wykonywanych po raz pierwszy bardzo często znacznie różnią się od rzeczywistych wartości badanych wielkości. Mając jednak możliwość powtarzania doświadczenia, można stopniowo tak udoskonalać technikę i metodę pomiaru aby otrzymywane wyniki zaczęły zbliżać się asymptotycznie do wartości, którą można z dobrym zaufaniem przyjąć jako tą, której poszukujemy. Jest to następstwem tego, że wyniki, wszelkich badań empirycznych są zawsze obarczone niepewnością - mówimy, że wyniki są obarczone błędami. Udoskonalanie techniki i metodyki badań może w znacznym stopniu zredukować niepewność końcowego wyniku, jednak nie może doprowadzić do jej całkowitego usunięcia. W związku z tym, eksperymentator zawsze staje przed problemem oszacowania ( estymacji ) niepewności swojego wyniku i każdorazowo podając wynik pomiaru powinien określić również jego wiarygodność.

Przez **błąd** rozumiemy odchyłkę wyniku badań od prawdziwej wartości badanej wielkości. W większości przypadków wartość prawdziwa jest nieznana. Czasami, szczególnie w przypadku pomiarów w pracowniach studenckich, można z mniejszym lub większym przybliżeniem zorientować się ile poszukiwana wartość powinna wynosić, na przykład z wcześniejszych badań ( dane tablicowe ) lub rozważań teoretycznych. W takiej sytuacji można porównać otrzymane wyniki z tą wartością i w ten sposób z grubsza oszacować poprawność przeprowadzonych pomiarów. Jednakże, w trakcie wykonywania zupełnie nowych, dotychczas nie przeprowadzonych badań naukowych takich możliwości nie posiadamy. Powstaje więc konieczność wypracowania w miarę obiektywnej metodyki oszacowywania zarówno najbardziej wiarygodnej wartości badanej wielkości, lub najbardziej wiarygodnego opisu badanego zjawiska, jak i poziomu zaufania jakie możemy mieć co do wiarygodności naszych obserwacji. Podstawą i źródłem przeprowadzanych estymacji może być jedynie zbiór uzyskanych wyników i ewentualnie informacje o jakości zastosowanej aparatury pomiarowej.

Niepewność wyniku badań jest konsekwencją błędów, które pojawiają się w procesie wykonywania tych badań. Zanim przejdziemy do rozważenia rodzajów błędów, które mogą pojawić się w praktyce eksperymentalnej zauważmy, że błędy można zasadniczo podzielić na dwie odrębne klasy. Pierwsze to takie, które decydują o ścisłości metody pomiarowej. Drugie to takie, które decydują o precyzji pomiaru. Ze względu na to, że w potocznym języku terminy "ściśłość" i "precyzja" są tożsame, musimy zdefiniować co będziemy rozumieć pod tymi dwoma pojęciami.

Przez ścisłość doświadczenia ( metody pomiarowej ) rozumiemy miarę tego jak blisko prawdziwej wartości zbliżają się wyniki badań doświadczalnych. Innymi słowy ścisłość jest miara prawidłowości doświadczenia i jego wyniku. Precyzja pomiaru jest natomiast miara z jaką dokładnością wynik jest określony, bez względu na to co ten wynik oznacza. Możemy mówić o precyzji bezwzględnej i względnej; pierwsza wskazuje na wielkość niepewności wyniku w tych samych co wynik jednostkach, druga podaje niepewność w formie ułamka wartości wyniku.

--- ooo 000 ooo ---

Przykład 1. Wykonując pomiary długości w warunkach domowych, bardzo często posługujemy się "krawieckim" przymiarem płóciennym. Przymiar taki charakteryzuje się niską precyzją bezwzględną (1cm - najmniejsza działka ) a ponadto, ze względu na materiał z

którego jest wykonany, przy częstym używaniu rozciąga się zmniejszając tym samym ścisłość pomiaru.

Przykład 2. Precyzja przyrządów pomiarowych (np. woltomierzy, amperomierzy i innych) podana jest jako tzw. klasa (dokładność) przyrządu **k**:

(maksymalna odchyłka) = (maksimum zakresu pomiarowego) • **k**/100.

Zauważmy, że odchyłka ta odnosi się do powtarzalności wyniku lecz nie mówi o jego prawidłowości; o prawidłowości decyduje zaś kalibracja (cechowanie) przyrządu.

--- ooo 000 ooo ---

Pomimo zasadniczej różnicy między ścisłością a precyzją, w każdym doświadczeniu jedno i drugie musimy rozważać nierozłącznie. Nie ma sensu wykonywanie pomiaru z wysoka precyzją jeśli z góry wiemy, że rezultat musi wyraźnie odbiegać od prawdy. Odwrotnie, nie możemy wyniku traktować jako wyjątkowo ścisłego, jeżeli wiemy, że precyzja pomiaru była nienajlepsza.

O ścisłości doświadczenia decydują dwie grupy błędów: błędy grube i systematyczne. **Błędy grube** możemy wyeliminować stosunkowo łatwo i bezpośrednio; są to bowiem błędy będące następstwem rażących pomyłek eksperymentatora w trakcie pomiaru albo obliczeń. Pominąwszy skrajny przypadek od początku błędnie zaplanowanego doświadczenia lub błędnie wykonanego zestawu pomiarowego, najczęstszym źródłem błędów grubych są przeoczenia: zła skala przyrządu, błędny układ jednostek czy też np. awaria przyrządu pomiarowego. Na szczęście obecność takich błędów jest zazwyczaj łatwa do identyfikacji (patrz paragraf poświęcony odrzucaniu niepewnych pomiarów) i usuwamy je poprzez powtórzenie doświadczenia, po wyeliminowaniu źródeł błędów grubych.

Druga grupa błędów już nie tak łatwych do zauważenia i tym samym do usunięcia to tzw. **błędy systematyczne**. Błędy takie to przede wszystkim następstwo niedoskonałości układów pomiarowych, np. błędnej kalibracji - włączając w to również i eksperymentatora; nasze zmysły mają ograniczone czułości, które dodatkowo każdy człowiek ma inne, np. zdolności rozdzielcze oka czy ucha. Błędy systematyczne możemy czasami próbować oszacować poprzez analizę techniki pomiarowej i warunków doświadczenia, najczęściej Jednak niepewności wynikające z takich błędów muszą być szacowane i powiązane z niepewnościami wynikającymi z fluktuacji statystycznych.

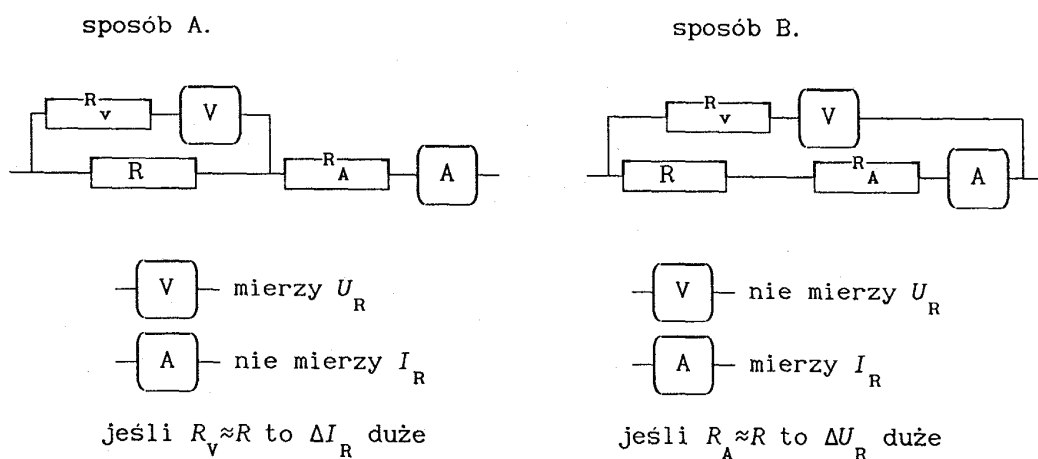
Innym i conajmniej równie istotnym źródłem błędów systematycznych, a czasami i grubych, jest model matematyczny, którym posługujemy się do opisu badanego zjawiska. Zazwyczaj model taki nie jest ścisły, tzn. identycznie zgodny z prawdziwym charakterem i przebiegiem zjawiska, lecz stanowi jedynie mniej lub bardziej udane jego przybliżenie.

--- ooo 000 ooo ---

Przykład 3. Student wykonał pomiary długości drewnianej belki przy pomocy stalowego przymiaru i stwierdził, że średnia wartość jego pomiarów wynosi  $x = 1.982\text{m}$  (zapis taki oznacza precyzję bezwzględna 1 mm lub, jak kto woli, względna rzędu 1/2000

(=0.05%). Później dowiedział się, że przymiar był cechowany w temperaturze 25°C, podczas gdy on wykonywał swoje pomiary przy 20°C. Ponieważ współczynnik rozszerzalności cieplnej przymiaru wynosił .005/K, musiał pomnożyć swój wynik przez  $(1-5 \cdot .005) = .9975$  aby skompensować błąd systematyczny związany ze skurczeniem się przymiaru;  $x = 1.977\text{m}$ . Aby sprawdzić poprawność odczytu długości wykonał jeszcze jeden dodatkowy pomiar i zauważył, że ze względu na złe oświetlenie skali przymiaru Jego poprzednie wyniki były zaniżone o około 2mm. Usuwając ten błąd systematyczny, przyjął ostatecznie za długość belki  $x = 1.979\text{m}$ . Zauważmy, że poprawki, które student uwzględnił w trakcie opracowywania wyników miały za zadanie poprawienie ścisłości metody pomiarowej poprzez kompensowanie znanych odchyłek początkowego wyniku od możliwie najlepszej estymaty prawdziwej długości belki. Poprawki te zupełnie nie polepszają precyzji pomiaru, mało tego - w rzeczywistości ją zmniejszają, bowiem poprawki same w sobie są jedynie oszacowaniami rzeczywistych prawdziwych poprawek.

Przykład 4. Przyrząd pomiarowy może swoją obecnością zakłócać pomiar. Weźmy pod uwagę pomiar prądu  $I_R$  płynącego przez opornik  $R$  oraz spadek napięcia  $U$  na tym oporniku. Pomiar taki można wykonać na dwa sposoby:



Ścisłość doświadczenia zgodnie z definicją zależy zasadniczo od tego jak dobrze kontrolujemy bądź kompensujemy błędy systematyczne (i grube). Precyzja doświadczenia zależy natomiast od tego w jakim stopniu jesteśmy w stanie zniwelować a w najgorszym przypadku zanalizować **błędy przypadkowe**. Błędy takie powstają jako wynik fluktuacji wartości zmierzonej od wartości prawdziwej tak w jedną jak i w drugą stronę i wymagają wielokrotnego powtarzania pomiaru w celu uzyskania precyzyjnego wyniku. Źródłem błędów przypadkowych jest wiele niezależnych przyczyn o porównywalnym znaczeniu. Określona ścisłość implikuje conajmniej równie dobrą precyzję co z kolei oznacza, że również i ścisłość pomiaru zależy w pewnym stopniu od błędów przypadkowych.

Zauważmy, że problem redukcji błędów przypadkowych jest zasadniczo problemem zarówno ulepszania doświadczenia i techniki pomiaru jak i prostego powtarzania doświadczenia. Ilustrują to dwa skrajne przypadki:

(i) Wyobraźmy sobie, że przy wielokrotnym powtarzaniu pomiaru pewnej wielkości uzyskujemy ciągle taką samą wartość. W takim przypadku fluktuacje statystyczne odgrywają

drugoplanowa rola, zaś błędy przypadkowe wynikają bezpośrednio z niepewności aparaturowych ( precyzja przyrządu pomiarowego ). W tej sytuacji nie ma sensu powtarzać pomiarów wystarczy jeden bowiem pomiar wielokrotny może zmniejszyć niepewność wynikająca z odchyłek przypadkowych ale nie może poprawić czułości aparatury. Miejmy świadomość, że brak fluktuacji nie świadczy o doskonałości pomiarów! Informacja uzyskana w pojedynczym pomiarze będzie bez wątpienia ścisła, lecz wartość informacyjna wyniku jest ograniczona do stwierdzenia, że precyzję pomiaru określają niepewności aparaturowe. Precyzję zaś można zwiększyć jedynie stosując bardziej doskonałą technikę i precyzyjniejsze przyrządy pomiarowe.

(ii) Teraz z kolei wyobraźmy sobie, że przy wielokrotnym powtarzaniu pomiaru pewnej wielkości uzyskujemy wyniki nieznacznie ale jednak różniące się między sobą. W takim przypadku można stwierdzić, że fluktuacje statystyczne przewyższają niepewności aparaturowe i wielokrotne powtarzanie pomiaru jest uzasadnione. Zauważmy jednak, że w związku z tym co stwierdziliśmy w pierwszym przypadku, nawet nieskończone zwiększanie liczby pomiarów nie może zmniejszyć niepewności końcowego wyniku poniżej niepewności aparaturowej. Ma więc sens wykonywanie jedynie takiej ilości pomiarów, która zapewni zmniejszenie niepewności wynikającej z błędów przypadkowych do poziomu niepewności aparatury pomiarowej.

Skoro ze względu na nieznaną wartość prawdziwej badanej wielkości nie możemy wyznaczyć dokładnej wartości błędu pomiaru, wszelkie oszacowania niepewności wyniku muszą mieć siłą rzeczy charakter probabilistyczny. Jakiegokolwiek estymacie błędu pomiaru musi równocześnie towarzyszyć informacja o prawdopodobieństwie tego, że aktualnie popełniony błąd jest mniejszy niż oszacowana wartość błędu. Na przykład, na określenie oszacowania błędu, który popełniliśmy w czasie wykonywania badań, tradycyjnie wprowadza się pojęcie **błędu prawdopodobnego**. Błąd prawdopodobny jest taka wartość oszacowania błędu, że mamy 50% szansy na to, że aktualny błąd jest mniejszy niż ta wartość. Jest to dużo i mało za razem; oznacza bowiem równocześnie 50% szansy na to, że różnica między naszym wynikiem a prawdziwą wartością jest nie mniejsza niż błąd prawdopodobny! Wartość błędu prawdopodobnego nie jest więc najbardziej prawdopodobną wartością błędu ale jedynie miarą jak wielki jest przypuszczalnie błąd.

Powtarzając doświadczenie w warunkach jak najbardziej zbliżonych do pierwotnych możemy oczekiwać, że ponowny wynik, choć niekoniecznie identyczny z pierwszym, będzie miał taką samą niepewność, a więc i błąd prawdopodobny, co poprzednio. Ponieważ oczekujemy od obu wyników, że są w 50% zgodne z wartością prawdziwą w granicach błędu prawdopodobnego, oznacza to również, że powinny być one zgodne ze sobą w granicach wyznaczonych przez pewien ułamek błędu prawdopodobnego. Błąd prawdopodobny wyniku jest więc również miarą przypuszczalnej różnicy między dwoma dowolnymi wynikami uzyskanymi w możliwie identycznych warunkach eksperymentalnych. Mając świadomość probabilistycznego znaczenia estymaty błędu musimy ustalić jednoznaczną i spójną metodę wyznaczania takiej estymaty z danych doświadczalnych. Co więcej, nasza analiza błędów nie powinna ograniczyć się jedynie do określenia precyzji wyników. Będziemy oczekiwać, że najbardziej wiarygodne będą te wyniki końcowe, wyznaczone z danych doświadczalnych, dla których oszacowane błędy będą najmniejsze. W konsekwencji, analiza błędów powinna nam również pomóc określić optymalne estymaty parametrów opisujących badane zjawisko. Obecnie skoncentrujemy się wyłącznie na analizie błędów przypadkowych, zakładając milcząco, że zdołaliśmy pozbyć się grubych omyłek i błędów systematycznych, a tym samym możemy uważać naszą metodę pomiarową za ścisłą.

## 2. ANALIZA BŁĘDÓW PRZYPADKOWYCH.

### 2. 1 Pomiary Bezpośrednie.

Zajmiemy się na początek najprostszym przypadkiem badań eksperymentalnych, kiedy naszym zadaniem jest bezpośredni pomiar (obserwacja) jakiejś wielkości. Na przykład może to być pomiar długości jakiegoś przedmiotu, pomiar masy, objętości itp., każdy z których wykonujemy przy pomocy jednego przyrządu pomiarowego a wynik pomiaru stanowi bezpośrednio wartość badanej wielkości.

#### 2.1.1 Populacja pierwotna.

Występowanie błędów przypadkowych spowoduje, że wykonując pomiar wielkości  $X$  możemy jedynie oczekiwać, że jego wynik  $x_i$  będzie przybliżeniem wartości prawdziwej  $x_0$ . Z tych samych powodów wystąpią z reguły różnice pomiędzy wynikami dwóch niezależnych pomiarów a żaden z wyników nie będzie identyczny z  $x_0$ . Powtarzając pomiar wielokrotnie powinniśmy natomiast zauważyć pojawienie się pewnego uporządkowania w wynikach. Wyniki powinny grupować się wokół  $x_0$ , niektóre z nich będą zbyt małe, niektóre zaś zbyt duże. Przeprowadzając nieskończoną liczbę pomiarów uzyskalibyśmy nieskończony zbiór wyników, który nazywany jest **populacją pierwotną**. Posiadając populację pierwotną (albo po prostu: populację) moglibyśmy dokładnie opisać w jaki sposób wyniki pomiarów są rozłożone wokół  $x_0$ . Rozkład ten moglibyśmy opisać podając rozkład prawdopodobieństwa, który określa prawdopodobieństwo uzyskania danej wartości wyniku pojedynczego pomiaru. Nieskończony zbiór wyników będzie oczywiście rozłożony zgodnie z tym rozkładem, który przez analogie nazywamy **rozkładem pierwotnym**.

Kształt rozkładu pierwotnego jest zdeterminowany warunkami doświadczenia, jakością i czułością aparatury pomiarowej. Im czulsza metoda pomiarowa tym rozkład pierwotny będzie węższy lecz jego szerokość zawsze będzie miała skończoną wartość. Oznacza to, że nawet wykonanie nieskończonej liczby pomiarów wyklucza możliwość dokładnego wyznaczenia  $x_0$  bowiem nie jesteśmy w stanie wyeliminować całkowicie niepewności wyniku końcowego, t.j. nieskończenie zwęzić rozkład pierwotny. Zwiększając liczbę pomiarów zwiększamy precyzję pomiaru, jednakże jedynie do granicy wyznaczonej przez populację pierwotną.

Skoro tak jest, to natychmiast pojawia się pytanie, jaką wartość  $x$  należy przyjąć jako najbardziej wiarygodne przybliżenie  $x_0$ . Czy tą, której prawdopodobieństwo wystąpienia jest największe (maksimum rozkładu pierwotnego)? Czy może taką, która jest środkiem ciężkości rozkładu pierwotnego (prawdopodobieństwo uzyskania wyniku mniejszego od tej wartości jest takie samo jak i wyniku większego, t.j. 50%)? A może coś zupełnie innego? W rzeczywistości sytuacja jest jeszcze bardziej skomplikowana bowiem wykonywanie nieskończonej liczby pomiarów, a tym samym wyznaczenie rozkładu pierwotnego jest nierealne. W praktyce, w każdym doświadczeniu wykonujemy skończoną liczbę powtórzeń pomiaru. Skończony zbiór naszych wyników możemy traktować jedynie jako **próbę** z populacji pierwotnej i zakładać, że rozkład wyników w tej próbie jest odzwierciedleniem rozkładu pierwotnego. Na podstawie skończonej próby trudno jest jednak wiarygodnie wnioskować o dokładnym kształcie rozkładu, co najwyżej możemy przypuszczać o tym czy jest to rozkład symetryczny czy też nie. Zwróćmy uwagę na to, że w związku z tym co napisano powyżej zasadniczo istotna jest nie tyle znajomość dokładnego kształtu rozkładu co jak najlepsze oszacowanie wartości  $x_0$  oraz błędu. Zamiast poszukiwać równania opisującego rozkład pierwotny, wyznacza się raczej szereg uniwersalnych wielkości (parametrów) charakterystycznych dla rozkładu, o precyzyjnej interpretacji probabilistycznej. Posiadając do



dyspozycji jedynie próbę o ograniczonej liczności będziemy więc starać się aby oszacować jak najlepiej parametry rozkładu pierwotnego a stąd wydedukować jak najbardziej wiarygodne estymaty  $x_0$  oraz błędu.

Założmy, że wykonaliśmy  $N$  pomiarów, ich wyniki oznaczamy  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , a całą tę próbę w skrócie  $\{x_N\}$ . Definiując parametry rozkładu oprzemy się na intuicyjnie usprawiedliwionym założeniu, że w miarę wzrostu liczby pomiarów do nieskończoności, estymaty parametrów powinny zbliżać się asymptotycznie do wartości parametrów populacji pierwotnej, co symbolicznie zapisujemy:

$$(\text{parametr populacji}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\text{parametr próby}) \quad (1)$$

Parametry opisujące rozkład wyników możemy podzielić na dwie grupy, t. j. takie które określają położenie centrum rozkładu, oraz takie które mają za zadanie charakteryzować rozrzut wyników wokół tego centrum, innymi słowy, szerokość rozkładu.

### 2.1.2. Parametry określające centrum rozkładu.

**Wartość średnią** definiujemy jako

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_i x_i \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum x_i \right) \quad (2)$$

Wskaźnik sumacyjny oraz jego górną granicę przy symbolu sumy będziemy dla uproszczenia zapisu opuszczać, gdy sumowanie przebiega po wszystkich elementach próby od 1 do  $N$ . W celu uniknięcia niejasności, parametry rozkładu pierwotnego będziemy oznaczać literami greckimi, natomiast estymaty tych parametrów wyznaczone na podstawie próby - literami rzymskimi.

**Mediana** populacji pierwotnej,  $\mu_{1/2}$ , albo w skrócie mediana, jest zdefiniowana jako taka wartość  $x$ , dla której w granicy nieskończonej liczby pomiarów, połowa obserwacji jest większa niż mediana, a druga połowa - mniejsza od niej. W sensie rozkładu pierwotnego oznacza to, że prawdopodobieństwo tego, że dowolny pomiar jest większy lub mniejszy od mediany wynosi 50%:

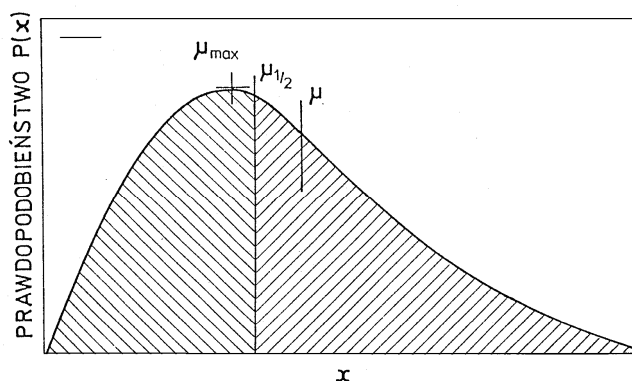
$$P(x_i \leq \mu_{1/2}) = P(x_i \geq \mu_{1/2}) = 1/2 \quad (3)$$

t.j. mediana dzieli powierzchnie pod krzywą rozkładu pierwotnego na dwie równe połowy, patrz Rys.1.

Wartość najbardziej prawdopodobna, albo inaczej, wartość modalna populacji,  $\mu_m$ , jest tą wartością wielkości  $X$ , dla której rozkład pierwotny ma największą wartość. Dla dowolnego ale konkretnego doświadczenia jest to wartość, która mamy największą szansę zaobserwować, a w granicy dużej liczby pomiarów, wartość ta powinna przypuszczalnie wystąpić najczęściej:

$$P(\mu_m) \geq P(x_i \neq \mu_m) \quad (4)$$

Wzajemne relacje między wartością średnią, modalną i medianą zilustrowano na wykresie hipotetycznego rozkładu pierwotnego, Rys.1. Zauważmy, że dla rozkładu symetrycznego, ze względu na symetrię definicji, wszystkie parametry będą sobie równe.



Rys. 1 Przykład rozkładu prawdopodobieństwa z zaznaczonymi: wartością średnią  $\mu$  medianą  $\mu_{1/2}$  oraz wartością modalną  $\mu_m$ .

### 2.1.3. Parametry charakteryzujące szerokość rozkładu.

**Odchyleniem**  $d_i$  dowolnego pomiaru od wartości średniej rozkładu nazywamy różnicę między  $x_i$  a  $\mu$ :

$$d_i = x_i - \mu \quad (5)$$

Ze względów obliczeniowych odchylenia definiuje się raczej względem wartości średniej a niżeli mediany czy też wartości modalnej. Gdyby  $\mu$  było prawdziwą wartością wielkości  $X$  to  $d_i$  byłoby prawdziwą wartością błędu pomiaru  $x_i$ .

Zauważmy, że zgodnie z definicją wartości średniej, średnia odchyłeń dla nieskończonej liczby pomiarów musi znikać:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle d \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \mu) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_i x_i \right] - \mu \quad (6)$$

W związku z tym wartość średniego odchylenia populacji,  $\alpha$ , definiujemy jako średnią absolutnych wartości odchyłeń  $|d_i|$ :

$$\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_i |x_i - \mu| \right] \quad (7)$$

Średnie odchylenie jest miarą rozrzutu (dyspersji) wyników wokół wartości średniej, jednak konieczność stosowania absolutnych wartości odchyłeń czyni  $\alpha$  parametrem mało przydatnym do celów statystycznej analizy danych. W związku z tym, w miejsce  $\alpha$  przyjęto inną, alternatywną miarę dyspersji wyników, której stosowanie znajdzie uzasadnienie w dalszym toku naszych rozważań ( patrz również: Brandt S., Metody Statystyczne i Obliczeniowe Danych, PWN, Warszawa 1976 ). Parametrem tym jest **odchylenie standardowe**  $\sigma$ , zdefiniowane jako pierwiastek kwadratowy z średniej arytmetycznej kwadratów odchyłeń, która zwyczajowo nazywa się **wariancją**,  $\sigma^2$ :

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_i d_i^2 \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_i x_i^2 \right] - \mu^2 \quad (8)$$

#### 2.1.4. Interpretacja parametrów rozkładu.

Wartość średnia, mediana i wartość modalna, ze względu na to że opisują położenie "środką" rozkładu w przedziale możliwych wartości populacji pierwotnej, stanowią pewne przybliżenie wartości prawdziwej  $x_0$ . W ogólnym przypadku rozkładu asymetrycznego jest praktycznie bardzo trudno stwierdzić, który z parametrów odpowiada  $x_0$ .

Na przykład, w doświadczeniu z Przykł. 2, student próbował zmierzyć długość belki. Informacją jakiej poszukiwał był parametr opisujący odległość pomiędzy obydwoma końcami belki. Zwróćmy uwagę, że już podanie definicji co będziemy rozumieli przez 'odległość między końcami belki' nie jest trywialne bowiem krawędzie belki nigdy nie są idealne. Oczywiście możemy sobie wyobrazić idealny przypadek istnienia takiej absolutnie prawdziwej długości belki. Jeśli rozkład pierwotny charakterystyczny dla naszego eksperymentu byłby symetryczny, wtedy oczywiście średnia rozkładu byłaby równa medianie i wartości modalnej, i wszystkie te wartości byłyby równe identycznie prawdziwej długości belki. Jeśli jednak ten rozkład nie jest symetryczny względem wartości średniej (porównaj Rys. 1), wtedy bezwzględnie musimy wiedzieć więcej o źródłach i przyczynach odchyłek aby móc wnioskować o tym, która z trzech wielkości: wartość średnia, mediana czy też wartość modalna, charakteryzuje 'prawdziwą' długość belki choć równie dobrze może się okazać, że warunku tego nie spełnia żadna z tych wielkości!

W praktyce, najczęściej posługujemy się wartością średnią. O wartości średniej zawsze możemy powiedzieć, że jest to jeden z parametrów charakteryzujących rozkład pierwotny, który ma identyczny wymiar co wartość 'prawdziwa' i dopóki nie mamy podstaw twierdzić, że jest inaczej, będziemy zgodnie z tradycją uważać w większości przypadków, że jest ona najlepszą estymatą wartości prawdziwej jaką można uzyskać.

Wariancja  $\sigma^2$  oraz odchylenie standardowe  $\sigma$  charakteryzują niepewności związane z doświadczalnymi próbami wyznaczenia 'prawdziwych' wartości. Wartość odchylenia standardowego można interpretować dwojako.

(i) Z naszego punktu widzenia najistotniejszy jest związek między  $\sigma$  a oszacowaniem  $\mu$  z danych doświadczalnych. Dla skończonej liczby obserwacji niepewność wyznaczenia średniej rozkładu pierwotnego jest proporcjonalna do odchylenia standardowego tego rozkładu. Możemy więc uważać  $\sigma$  za właściwą miarę niepewności związanej z obecnością fluktuacji w pomiarach.

(ii) Nie zapominajmy jednocześnie, że wartość średnia i 'prawdziwa' nie muszą być sobie równe, różnica między nimi powinna być mniejsza niż niepewność wynikająca z rozkładu prawdopodobieństwa. Tak więc traktujmy  $\sigma$  również jako miarę niezgodności pomiędzy parametrem  $\mu$  rozkładu a wartością prawdziwą badanej wielkości.

#### 2.1.5. Estymacja rozkładu pierwotnego na podstawie próby.

Wróćmy do doświadczenia, w którym wykonaliśmy  $N$  pomiarów  $x_i$  ( $i=1, \dots, N$ ), wielkości  $X$ , której prawdziwa wartość wynosi  $x_0$ . Zakładamy, że dla warunków doświadczenia istnieje populacja pierwotna potencjalnych pomiarów i rozkład pierwotny określający prawdopodobieństwo wyniku  $x_i$ . Zbiór  $\{x_N\}$  stanowi próbę z populacji i naszym zadaniem jest na podstawie tej próby dokonać oszacowań wszystkich interesujących nas parametrów rozkładu pierwotnego (populacji pierwotnej).

Na podstawie zbioru wyników można określić rozkład częstości pojawiania się określonego wyniku w próbie. Rozkład taki określi nam sposób, w jaki uzyskane wyniki są rozłożone w całym dostępnym zakresie wartości. Możemy wyznaczyć wartość średnią  $\langle x \rangle$ ,

oraz wariancje próby,  $s^2$ . Pamiętajmy jednak, że od próby do próby, szczególny kształt i wielkość rozkładu częstości nie są dokładnie powtarzalne.

Na podstawie kształtu i wielkości rozkładu częstości możemy estymować, i tylko estymować, kształt rozkładu pierwotnego: na podstawie wartości parametrów rozkładu częstości próby oszacujemy wartości parametrów rozkładu pierwotnego.

**Wartość średnia próby,  $\langle x \rangle$ .** Dla serii  $N$  pomiarów, najbardziej wiarygodna estymata wartości średniej populacji  $\mu$  jest wartość średnia próby:

$$\mu \cong \langle x \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum x_i \quad (9)$$

Zauważmy, że zgodnie z tą definicją suma odchyłeń  $d_i = x_i - \langle x \rangle$  jest równa 0.

Średnie odchylenie (wartość bezwzględnych wartości odchyłeń) niekoniecznie musi mieć wartość minimalną, łatwo natomiast pokazać że suma kwadratów odchyłeń  $d_i^2$  jest zminimalizowana jeżeli liczymy te odchylenia względem wartości średniej próby (koncepcja ta stanowi podstawę tzw. metody najmniejszych kwadratów do której wrócimy nieco później). Aby to pokazać, szukamy takiej wartości parametru  $\langle x \rangle$  dla której suma  $\sum d_i^2 = \sum (x_i - \langle x \rangle)^2$  ma wartość minimalną. Jest to równoznaczne z żądaniem aby

$$\frac{d}{d \langle x \rangle} = \sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2 = -2 \sum_i x_i + 2N \langle x \rangle \quad (10)$$

skąd bezpośrednio wynika, że  $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum x_i$ . Tak więc warunek minimum sumy kwadratów odchyłeń względem średniej jest równoznaczny z definicją wartości średniej z próby, co uzasadnia powyższe stwierdzenie.

**Odchylenie standardowe próby,  $s$ .** Przez analogie, można się spodziewać, że najlepsze oszacowanie odchylenia standardowego  $\sigma$  uzyskamy z odpowiednio zmodyfikowanej definicji wariancji (wz.(8)):

$$s^2 \cong \frac{1}{N} \sum (x_i - \mu)^2 \quad (11)$$

Posłużenie się powyższym równaniem wymagałoby znajomości dokładnej wartości średniej populacji. My zaś do dyspozycji posiadamy jedynie jej estymat, t.j. wartość średnią próby  $\langle x \rangle$ . Ponieważ wartość  $\langle x \rangle$  uzyskaliśmy przez minimalizację sumy kwadratów odchyłeń, wz. (10), możemy oczekiwać, że oszacowanie wariancji przez mechaniczne zastąpienie  $\mu$  przez  $\langle x \rangle$  zaniży wartość oszacowania w porównaniu do tego co uzyskalibyśmy z wz. (11). Tę tendencję do zaniżania wartości estymaty wariancji można zrekompensować. Czynnikiem  $N$  w mianowniku r. (11) przedstawia sobą liczbę niezależnych obserwacji użytych do określenia estymaty  $\sigma^2$ , jest to tzw. liczba stopni swobody  $\nu$ , która definiuje liczbę obserwacji przewyższającą minimalną liczbę obserwacji, niezbędnych do wyznaczenia wszystkich parametrów występujących w równaniu. Ponieważ  $\mu$  jest znane dokładnie więc nie jest parametrem wyznaczanym i  $\nu = N$ . Zastępując znaną wartość  $\mu$  przez nieznaną wartość  $\langle x \rangle$ , jeden pomiar jest minimalną liczbą pomiarów niezbędnych do wyznaczenia tego ostatniego i liczba stopni swobody redukuje się do  $\nu = N - 1$ . Konsekwentnie, za najlepszą doświadczalną estymatę wariancji populacji przyjmuje się:

$$s^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum (x_i - \langle x \rangle)^2 \quad (12)$$

którą przez analogię nazywamy **wariancja próby**. Co za tym idzie, najbardziej wiarygodną doświadczalną estymatą pierwotnego odchylenia standardowego jest **odchylenie standardowe próby**  $s = \sqrt{s^2}$ .

Podaną definicję estymaty wariancji populacji można uzasadnić intuicyjnie, jeśli założymy że wykonaliśmy tylko jeden ( $N=1$ ) pomiar. Znając  $\mu$  możemy estymatę  $\sigma$  wyliczyć z r. (11). Jeśli jednak do wz. (11) podstawimy  $\langle x \rangle$  zamiast  $\mu$ , to otrzymamy nonsensowny wynik sugerujący 'idealny' pomiar. Posługując się natomiast wz. (12) uzyskujemy informacje, że wariancja próby jest nieokreślona, tak jak być powinno. Zauważmy, że podana definicja estymaty wariancji populacji pierwotnej jest również zgodna z postulatem r. (1), t.j. w granicy nieskończonej liczby pomiarów, r. (12) dąży do  $\sigma^2$ .

Z oszacowanych wartości parametrów rozkładu pierwotnego estymujemy poszukiwane wyniki. W ogólności będziemy zakładać, że wartości pewnych parametrów rozkładu pierwotnego można identyfikować z 'prawdziwymi' wartościami badanych wielkości. Nie zapominajmy jednak, że rozkład pierwotny jest nie tylko funkcja 'prawdziwych' wartości ale również warunków doświadczalnych i niekoniecznie te pierwsze i te drugie muszą być separowalne. Widać to dobrze na prostym przykładzie dwóch ścisłych układów pomiarowych opartych na tej samej zasadzie ale różniących się precyzją, dla których oba rozkłady pierwotne będą miały taki sam kształt i taka samą wartość średnią ale wartości parametrów określających ich szerokości będą różne. Przykład, który przedstawiono poniżej jest przykładem wymagowanym, wygenerowanym przy pomocy komputera. Pozwala jednak lepiej zrozumieć problemy z jakimi spotkamy się analizując dane doświadczalne.

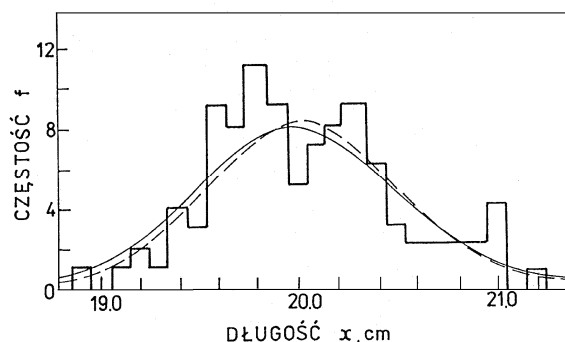
--- ooo 000 ooo ---

Przykład 6. Student wykonał 100 pomiarów długości drewnianego klocka z dokładnością .1cm. Jego wyniki, po uwzględnieniu wszelkich możliwych poprawek kompensujących błędy systematyczne, zawierają się w przedziale od 18.9cm do 21.2cm i wiele z nich się powtarza. Wyniki te zestawiono w poniższej tabeli w formie rozkładu częstości powtórzeń identycznych wyników

długość/cm	krotność				
X	f	X	f	X	f
18.9	1	19.7	8	20.5	3
19.0	0	19.8	11	20.6	2
19.1	1	19.9	9	20.7	2
19.2	2	20.0	5	20.8	2
19.3	1	20.1	7	20.9	2
19.4	4	20.2	8	21.0	4
19.5	3	20.3	9	21.1	0
19.6	9	20.4	6	21.2	1

Średnia wartość z pomiarów wynosi  $\langle x \rangle = 20.03 \text{cm}$  a estymowana wartość odchylenia standardowego  $s = .48 \text{cm}$  Wyniki pomiarów przedstawiono również graficznie na Rys.2 w formie tzw. histogramu ukazującego rozkład częstości obserwacji poszczególnych długości

klocka. Histogram jest bardzo dogodnym sposobem prezentowania danych, ukazując z jednej strony fluktuacyjny charakter skończonego zbioru punktów pomiarowych, z drugiej strony



Rys. 2 Histogram wyników pomiaru długości klocka z Przykł.6. Zaznaczono również rozkłady Gaussa: pierwotny (linia ciągła,  $\mu=20.$ cm,  $\sigma=.50$ cm) oraz rozkład próby (linia przerywana,  $\langle x \rangle=20.03$ cm,  $s=.48$ cm). Powierzchnia pod każdą krzywą rozkładu jest znormalizowana do powierzchni histogramu (100punktów).

umożliwiając estymację kształtu rozkładu pierwotnego. Wykonując histogram uwzględniono fakt, że dokładność pomiarów wynosiła 1mm w związku z czym przedział jednostkowy histogramu przyjęto równy tej dokładności a poszczególne przedziały jednostkowe centrowane są na pełnych wartościach długości, co .1cm. Wyobraźmy sobie teraz, że choć student o tym nie wie, w latach poprzednich zebrano dostateczną liczbę danych doświadczalnych aby można było określić rozkład pierwotny ( $N \approx \infty$ ), który okazał się być rozkładem Gaussa (rozkład ten zostanie omówiony za chwilę) o parametrach:  $\mu=20.$ cm oraz  $\sigma=.50$ cm. Rozkład pierwotny można wykreślić w układzie współrzędnych histogramu i w naszym przypadku odpowiada mu ciągła linia na Rys.2. Dla porównania rozkład prawdopodobieństwa estymowany na podstawie próby, o którym student założył, że jest rozkładem Gaussa, zaznaczono linią przerywaną. Oba rozkłady znormalizowano tak aby odpowiadały 100 punktom doświadczalnym.

Co można zauważyć z takiego porównania? Po pierwsze, wyraźnie widoczna jest różnica pomiędzy 'prawdziwą' wartością średniej  $\mu$  a jej estymatą  $\langle x \rangle$ . Po drugie, wcale nie jest oczywiste, że  $\mu$  reprezentuje sobą prawdziwa długość klocka; ponieważ krawędzie klocka nie są idealnie gładkie, oprócz wszystkiego innego musimy sobie zdefiniować co będziemy rozumieli pod pojęciem "długość klocka". **Analizując dane doświadczalne musimy mieć pełną świadomość, że nasze możliwości poznawcze są ograniczone tylko do oszacowania wartości parametrów rozkładu pierwotnego.**

--- ooo 000 ooo ---

Rozważając wyniki jako próbę z populacji, t.j. zbiór wyników rozrzuconych w przedziale dostępnych wartości zgodnie z rozkładem pierwotnym, możemy wykonać oszacowania kształtu i dyspersji populacji co w następstwie dostarczy bardzo istotnej informacji o precyzji i wiarygodności wyników. Estymujemy  $\mu$  aby estymować 'prawdziwą' wartość  $x_0$ ,  $\sigma$  – aby oszacować niepewność naszego wyniku  $\langle x \rangle$ . Ale przede wszystkim musimy estymować kształt rozkładu pierwotnego aby mieć pewność, że rzeczywiście  $\mu$  można utożsamiać z  $x_0$ .

#### 2.1.6. Rozkład prawdopodobieństwa Gaussa (rozkład normalny błędów).

O kształcie rozkładu pierwotnego nie zakładaliśmy do tej chwili niczego konkretnego, traktując problem bardzo ogólnie. Nadszedł jednak moment aby sprecyzować rozważania i przejść do charakterystyki kształtu funkcji opisującej rozkład wyników przypadkowych.

Najważniejszym z punktu widzenia statystycznej analizy wyników rozkładem prawdopodobieństwa jest **rozkład Gaussa** zwany też **rozkładem normalnym**. Szczególną cechą tego rozkładu jest to, że rozkład ten wydaje się w większości przypadków dobrze opisywać rozkład wyników przypadkowych. Rozkład Gaussa opisywany jest ciągłą funkcją gęstości prawdopodobieństwa postaci:

$$P_G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (13a)$$

albo, biorąc pod uwagę definicję odchylenia,  $d=x-\mu$ , oraz fakt, że wartość średnia odchylen z definicji równa się 0:

$$P_G(d; 0, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{\sigma}\right)^2\right] \quad (13b)$$

Istnieje wiele wyprowadzeń tego rozkładu z pierwszych zasad, jednak żadne nie jest bardziej przekonujące niż czysto empiryczny fakt, że rozkład Gaussa stanowi rozsądną estymatę rozkładu pierwotnego, o w miarę prostej postaci analitycznej. Rozkład Gaussa posiada dodatkowo tę cenną cechę, że najbardziej prawdopodobną estymatą wartości średniej rozkładu  $\mu$  na podstawie przypadkowo wybranej próby jest wartość średnia próby  $\langle x \rangle$  (zobacz następny paragraf).

Funkcje dane wz. (13) są funkcjami gęstości prawdopodobieństwa, t.j. dla uzyskania prawdopodobieństwa znalezienia określonej wartości  $x$  musimy zdefiniować przedział wartości w którym  $x$  ma się zawierać; funkcję prawdopodobieństwa definiuje się poprawnie jako prawdopodobieństwo znalezienia przypadkowej wartości w nieskończenie małym przedziale  $dx$  wokół  $x$ . Dla rozkładu Gaussa zapisujemy to jako:

$$dP_G(x; \mu, \sigma) = P_G(x; \mu, \sigma) dx \quad (14)$$

Kształt rozkładu Gaussa przedstawiono na Rys.3. Krzywa jest symetryczna względem wartości średniej  $\mu$ . Szerokość krzywej jest charakteryzowana przez tzw. pełną szerokość w połowie maksymalnej wysokości albo, żargonowo, **szerokość połówkową**  $\Gamma$ . Jest to nic innego jak szerokość przedziału wartości pomiędzy punktami dla których prawdopodobieństwo jest równe połowie swojej maksymalnej wartości:

$$P_G(x \pm \Gamma/2; \mu, \sigma) = \frac{1}{2} P_G(x; \mu, \sigma); \quad \Gamma = 2.354\sigma \quad (15)$$

Ekstremalne gradienty funkcji  $P_G$  wystąpią dla  $x = \mu \pm \sigma$ :

$$P_G(\mu \pm \sigma; \mu, \sigma) = e^{-1/2} P_G(\mu; \mu, \sigma) \quad (16)$$

zaś styczne w tych punktach przetną oś  $OX$  w punktach  $x = \mu \pm 2\sigma$ , patrz Rys. 3.

Wartość średnia i odchylenie standardowe rozkładu Gaussa są równe parametrom  $\mu$  i  $\sigma$ , r. (13).

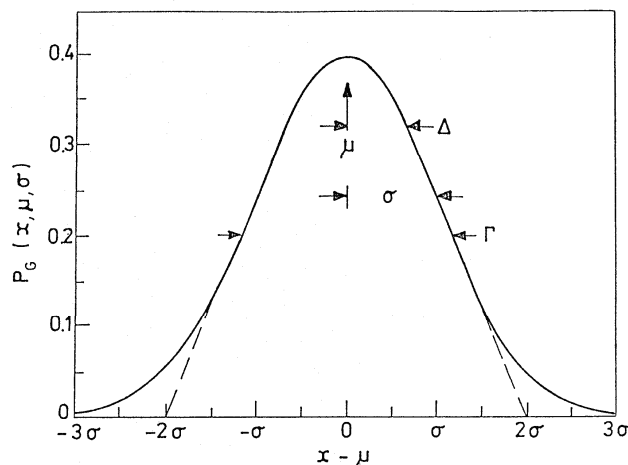
Błąd prawdopodobny  $\Delta$ , liczony zgodnie z podaną wcześniej definicją, wynosi:

$$\Delta = .6745\sigma = .2865\Gamma; \quad \Delta \approx \frac{2}{3}\sigma \quad (17)$$

Jeżeli wprowadzimy pojęcie **poziomu ufności** jako prawdopodobieństwa znalezienia przypadkowego wyniku w określonym przedziale dostępnych wartości badanej wielkości ( $\mu \pm \varepsilon$ ):

$$p = \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} dP(x; \mu, \sigma) \quad (18)$$

to łatwo stwierdzić, że jeżeli rozkład Gaussa jest rozkładem pierwotnym, to dla przedziału ( $\mu \pm \Delta$ ),  $p=.50$ , co oznacza, że w tym przedziale powinna znajdować się połowa populacji pierwotnej. Poziom ufności wraz z odpowiadającym mu przedziałem, który nazywamy **przedziałem ufności**, stanowią probabilistyczna miarę nieokreśloności wyników.



**Rys. 3** Rozkład Gaussa (rozkład normalny).  $\mu$  – wartość średnia,  $\sigma$  - odchylenie standardowe,  $\Gamma$  – szerokość połówkowa,  $\Delta$  - błąd prawdopodobny.

Analogicznie, dla innych charakterystycznych przedziałów można stwierdzić, że:

- w przedziale ( $\mu \pm \sigma$ ) powinno się znaleźć  $p=.683$ , t.j. około 2/3 populacji pierwotnej
- w przedziale ( $\mu \pm 2\sigma$ ),  $p=.95$  wszystkich wyników, a
- w przedziale ( $\mu \pm 3\sigma$ ), prawie cała populacja, bo  $p=.997$ .

Rozkład Gaussa nie jest jedynym rozkładem prawdopodobieństwa, z którym spotykamy się w praktyce redukcji i analizy danych doświadczalnych. Do często spotykanych należą takie rozkłady jak Dwumianowy, Poissona, Lorentza, Studenta i inne. Omówienie tych



rozkładów nie jest istotne dla dalszego toku tego opracowania, zainteresowanego czytelnika odsyłam do podręczników specjalistycznych.

My natomiast od tego momentu będziemy zakładali, że fluktuacje statystyczne prowadzą do rozrzutu wyników, albo inaczej mówiąc do ich dyspersji, zgodnie z rozkładem Gaussa.

### 2.1.7. Estymacje wartości średniej i błędu jej wyznaczenia.

W paragrafie 2.1.4. dyskutowaliśmy wartość średnią próby i wartość odchylenia standardowego próby oraz ich powiązanie z parametrami rozkładu pierwotnego. Stwierdziliśmy, że parametry próby można uważać za estymaty parametrów populacji pierwotnej, nierozstrzygniętą kwestią pozostały natomiast problemy:

- (i) czy te estymaty są rzeczywiście najbardziej wiarygodnymi ze wszystkich możliwych, oraz
- (ii) Jak liczna musi być próba ( $N = ?$ ) aby można było stwierdzić, że proponowane estymaty  $\mu$  oraz  $\sigma^2$  są wiarygodne, t.j. jaka musi być najmniejsza liczba pomiarów abyśmy mogli twierdzić, że można z tych danych estymować kształt gaussowskiego rozkładu pierwotnego, a także co robić w przypadku mniejszej liczby pomiarów.

Metoda Największej Wiarygodności, (MNW). W naszym hipotetycznym doświadczeniu wykonaliśmy  $N$  pomiarów i zakładamy, że uzyskane wyniki (punkty pomiarowe) są rozrzucone zgodnie z rozkładem pierwotnym. Jeśli rozkład pierwotny jest rozkładem gaussowskim z wartością średnią  $\mu$  i odchyleniem standardowym  $\sigma$ , to wtedy prawdopodobieństwo  $dP_i$  zaobserwowania wartości w  $x_i$  przedziale wokół  $dx_i$  wynosi zgodnie ze wz. (14):

$$dP_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dx_i \quad (19)$$

Oczywiście nie jesteśmy w stanie znać dokładnych wartości ani  $\mu$  ani  $\sigma$  i od razu na wstępie musimy przyjąć jakieś wartości jako oszacowania tych parametrów. Oznaczmy je  $\mu'$  i  $\sigma'$ . W jaki sposób, posługując się danymi doświadczalnymi, możemy znaleźć najbardziej wiarygodne estymaty parametrów populacji pierwotnej?

Załóżmy, że estymatą rozkładu pierwotnego jest rozkład Gaussa z parametrami  $\mu'$  i  $\sigma'$ . Wówczas prawdopodobieństwo obserwowania wartości  $x_i$  jest:

$$dP_i(\mu', \sigma') = \frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma'}\right)^2\right] dx_i \quad (20)$$

Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania takiej próby jak nasza? Prawdopodobieństwo zaobserwowania określonej  $N$  - licznej próby jest iloczynem prawdopodobieństw poszczególnych obserwacji, t.j.

$$P(\mu', \sigma') = \prod_{i=1}^N dP_i(\mu', \sigma') \quad (21)$$

gdzie symbol  $\Pi$  oznacza iloczyn. Podstawiając wz. (20) do (21) otrzymujemy

$$P(\mu', \sigma') = \left( \frac{1}{\sigma' \sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{x_i - \mu'}{\sigma'} \right)^2 \right] \prod_i dx_i \quad (22)$$

Zgodnie z metodą największej wiarygodności (patrz S. Brandt), najbardziej wiarygodna estymata wartości średniej populacji  $\mu$  będzie taka wartość  $\mu'$ , dla której prawdopodobieństwo zaobserwowania naszej  $N$ -elementowej próby dane r. (22) będzie największe. Innymi słowy, żądamy aby

$$\frac{d}{d\mu'} P(\mu', \sigma') = 0 \quad (23a)$$

co jest równoważne żądaniu aby pochodna z wykładnika funkcji eksponencjalnej względem  $\mu'$  była równa 0:

$$\frac{d}{d\mu'} \left[ \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{x_i - \mu'}{\sigma'} \right)^2 \right] = 0 \quad (23b)$$

lub, opuszczając nieistotne stałe,

$$\frac{d}{d\mu'} \sum_i (x_i - \mu')^2 = 0 \quad (24)$$

To ostatnie równanie oznacza, że oczekujemy od  $\mu'$ , że zminimalizuje sumę kwadratów odchyłeń. Zadanie to stanowi o nazwie metody: metoda najmniejszych kwadratów (MNK), która jak widać, jest konsekwencją zastosowania metody największej wiarygodności.

Wykonując różniczkowanie otrzymujemy

$$\frac{d}{d\mu'} \sum_i (x_i - \mu')^2 = -2 \sum_i (x_i - \mu') = 0 \quad (25)$$

a stąd natychmiast wynika, że

$$\sum_i x_i - N\mu' = 0 \longrightarrow \mu' = \langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_i x_i \quad (26)$$

czyli rzeczywiście, **przy założeniu gaussowskiego charakteru rozkładu pierwotnego, wartość średnia próby  $\langle x \rangle$  jest najbardziej wiarygodną estymatą wartości średniej populacji  $\mu$ .**

Jaki błąd możemy popełniać, przyjmując  $\langle x \rangle$  jako estymatę  $\mu$ ? Aby go oszacować, podobnie jak dla pojedynczego pomiaru, wyliczymy odchylenie standardowe średniej. W tym celu założmy, że nastąpiła mała fluktuacja każdego z wyników, w następstwie czego również i wartość  $\mu'$  nieznacznie się zmieniła. Rozwijając r. (26) w szereg Taylora wokół  $\langle x \rangle$  otrzymamy:

$$\mu'_j - \langle x \rangle \approx \sum_i (x'_{ij} - x_i) \frac{d \langle x \rangle}{dx_i} + \dots \quad (27)$$

Jeżeli takich fluktuacji było  $k$ , to możemy wyznaczyć wariancję wartości średniej,  $s_{\langle x \rangle}^2$ :

$$\begin{aligned} s_{\langle x \rangle}^2 &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\mu'_j - \langle x \rangle)^2 \approx \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (x'_{ij} - x_i)^2 \left( \frac{d \langle x \rangle}{dx_i} \right)^2 + \dots \right] \\ &\approx \sum_{i=1}^N \left( \frac{d \langle x \rangle}{dx_i} \right)^2 \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (x'_{ij} - x_i)^2 \\ &= s^2 / N \end{aligned} \quad (28)$$

bowiem z założenia, wszystkie wyniki  $x_i$  mają identyczną wariancję  $s^2$ . Odchylenie standardowe wynosi więc:

$$s_{\langle x \rangle} = s / \sqrt{N} \quad (29)$$

Zwyczajowo przyjęło się nazywać  $s_{\langle x \rangle}$  *średnim błędem kwadratowym średniej*.

Formułując równanie określające prawdopodobieństwo zaobserwowania otrzymanego przez nas zbioru danych założyliśmy, że wszystkie punkty pomiarowe pochodzą z tej samej populacji pierwotnej. Nie koniecznie musi tak być zawsze. Możemy być zmuszeni z jakichś powodów zmienić zakres przyrządu, osobę eksperymentatora, co prowadzi, przy ciągle ważnym założeniu, że jesteśmy w stanie usunąć błędy systematyczne, do istnienia w zbiorze wyników punktów pomiarowych pochodzących z różnych populacji pierwotnych. Wierzmy oczywiście, że cały czas nasza metoda jest ścisła, a więc, że wartości średnie populacji we wszystkich wypadkach są sobie identycznie równe i jedynym parametrem je różniącym jest odchylenie standardowe. W takiej sytuacji r. (22) musimy przepisać w postaci:

$$P(\mu') = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma'_i \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{x_j - \mu'}{\sigma'_j} \right)^2 \right] \quad (30)$$

Żądając ponownie największego prawdopodobieństwa zaobserwowania naszej próby otrzymamy analogiczny do r. (23b) warunek:

$$\frac{d}{d\mu'} \sum_i \left( \frac{x_i - \mu'}{\sigma'_i} \right)^2 = 0 \quad (31)$$

lub, wykonując różniczkowanie i wyliczając  $\mu'$ :

$$\mu' = \frac{\sum_i x_i / \sigma_i^2}{\sum_i 1 / \sigma_i^2} \quad (32)$$

co oznacza, że najbardziej wiarygodną estymatą  $\mu$  jest, w takim przypadku, średnia arytmetyczna punktów pomiarowych "ważonych" przez odwrotności ich własnych wariancji. Oczywiście jeżeli wagi wszystkich punktów pomiarowych są jednakowe, to jest pochodzą od tej samej populacji pierwotnej, to r. (32) sprowadza się do r. (26).

Analogicznie jak dla przypadku jednakowych wariancji wszystkich punktów, możemy obliczyć wariancję średniej:

$$s_{\langle x \rangle}^2 = \sum_i \frac{1/s_i^2}{(1/s_i^2)^2} = \frac{1}{\sum_i 1/s_i^2} \quad (33)$$

#### *Estymacja parametrów populacji w przypadku małej liczby pomiarów.*

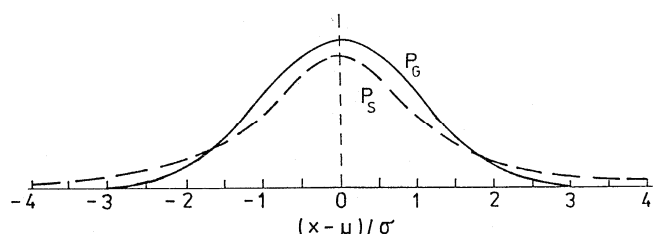
Małoliczna próba, tzn. mała liczba pomiarów nie jest reprezentatywną próbą dla określenia populacji pierwotnej. Często jednak się zdarza, że dysponujemy tylko kilkoma punktami pomiarowymi. Co i ile można powiedzieć o populacji pierwotnej w takim przypadku? Niewątpliwie bardzo trudno albo wręcz niemożliwe jest sądzić cokolwiek o kształcie rozkładu pierwotnego. Dlatego bezpiecznie jest przyjąć, że jest to rozkład symetryczny jako, w praktyce eksperymentalnej, najbardziej prawdopodobny.

Wartość średnia próby będzie w dalszym ciągu najbardziej wiarygodną estymatą wartości średniej populacji tyle, że jest to oszacowanie "niebardzo-znowu-tak-wiarygodne", przez co rozumiemy fakt, że nieokreśloność tego wyniku jest duża. Do tej pory posługiwaliśmy się odchyleniem standardowym jako miarą nieokreśloności estymaty wartości średniej, jednakże ze względu na małą liczbę wyników w obecnym przypadku  $s$  przestaje być dobrą miarą nieoznaczoności. Można oczywiście wyliczyć odchylenie standardowe, jednak probabilistyczna interpretacja tak wyznaczonej wielkości będzie wątpliwa. Sytuacja nie jest jednak beznadziejna. Okazuje się, że przy małej liczbie pomiarów znacznie bardziej wygodnym jest przyjmowanie założenia, że dyspersja punktów doświadczalnych jest zgodna z rozkładem Studenta, a nie rozkładem Gaussa. Na Rys.4 porównano przebieg rozkładu Gaussa i rozkładu Studenta. Jak widać z rysunku, "dzwon" rozkładu Studenta jest szerszy i niższy, znacznie łagodniej malejący na skrzydłach niż rozkład Gaussa. Z porównania obu krzywych można łatwo zauważyć, że dla tego samego poziomu ufności  $p$ , przedziały ufności rozkładu Gaussa i Studenta są różne: przedział ufności dla rozkładu Studenta musi być wyraźnie szerszy niż dla rozkładu Gaussa. Wynika stąd między innymi, że poziom ufności dla przedziału  $\mu \pm \Delta$  (błąd prawdopodobny) oszacowanego na podstawie małej liczby pomiarów musi być niższy niż 50%. Podobnie ma się rzecz z innymi parametrami charakteryzującymi nieoznaczoność wyniku. W związku z tym istnieją dwie drogi postępowania: albo każdorazowo podawać poziom ufności związany z oszacowanym parametrem -poziom ufności będzie funkcją liczby punktów pomiarowych, albo tak zwiększyć wartość oszacowań parametrów aby poziom ufności, t.j. ich interpretacja probabilistyczna, pozostał taki sam jak dla rozkładu Gaussa. W praktyce wygodniej jest wybrać drugą możliwość.

W Tabeli II w **Dodatku** podano wartości tzw. *współczynnika Studenta*,  $t_{p,N}$ , dla różnych wartości poziomu ufności  $p$  i liczby pomiarów  $N$ . Współczynnik Studenta określa przedział ufności w jednostkach odchylenia standardowego,  $(\mu \pm t_{p,N} \sigma)$ . Chcąc zachować interpretację probabilistyczną parametrów opisujących niepewność wyniku w przypadku małolicznej próby, musimy oszacowania parametrów pomnożyć przez odpowiednie współczynniki Studenta. W poniższym zestawieniu podano najczęściej stosowane w praktyce poziomy ufności i przedziały ufności dla rozkładów Gaussa i Studenta.

$p$	r. Gaussa	r. Studenta	uwagi
0.5	$\mu \pm \Delta$	$\mu \pm t_{0.5,N} \sigma$	błąd prawdopodobny
0.683	$\mu \pm \sigma$	$\mu \pm t_{0.683,N} \sigma$	błąd śr. kwadratowy
0.95	$\mu \pm 2\sigma$	$\mu \pm t_{0.95,N} \sigma$	
0.997	$\mu \pm 3\sigma$	$\mu \pm t_{0.997,N} \sigma$	

Zaletą rozkładu Studenta jest to, że w miarę wzrostu liczby punktów pomiarowych do nieskończoności kształt tego rozkładu zbliża się do kształtu rozkładu Gaussa; porównując wartości w *Tabelach I i II (Dodatek)* można zauważyć, że ze wzrostem  $N$ ,  $t_{0.683,N}$  dąży do 1,  $t_{0.95,N}$  do 2, a  $t_{0.997,N}$  do 3. Z porównania tego wynika również praktyczny wniosek, że z **dobrym przybliżeniem można stosować założenie rozkładu gaussowskiego do estymacji odchylenia standardowego jeżeli  $N > 6$ , oraz do estymacji wszystkich parametrów populacji pierwotnej dla  $N > 15$ .**



Rys. 4 Porównanie rozkładu Studenta  $P_S$  o dwóch stopniach swobody (trzy punkty pomiarowe,  $N=3$ ) ze znormalizowanym rozkładem Gaussa,  $P_G$ .

## 2.2 Pomiary pośrednie.

Do tego momentu rozważaliśmy sytuacje, w której układ pomiarowy pozwalał badać interesującą nas wielkość  $X$  bezpośrednio. Tak jest np. w przypadku wyznaczania długości belki, jej wagi, napięcia i natężenia prądu itp. W większości badań naukowych pomiary bezpośrednie służą jednak, w drodze dalszej obróbki matematycznej, do wyznaczania innych wielkości, których z racji ich natury, nie można badać bezpośrednio. Prostymi przykładami są np. pomiary objętości wspomnianej belki, jej powierzchni i gęstości, pomiar oporu przewodnika. W większości sytuacji będziemy więc wyznaczać najbardziej wiarygodne estymaty wielkości badanych pośrednio, na podstawie informacji zawartych w pomiarach bezpośrednich oraz równań matematycznych wiążących wielkość badana pośrednio z wielkościami mierzonymi bezpośrednio.

### 2.2.1 Propagacja błędów.

Przypuśćmy, że chcemy wyznaczyć wielkość  $X$ , która jest funkcją conajmniej dwóch innych wielkości ( $U, V, \dots$ ), które mogą być badane (mierzone) bezpośrednio:

$$X = f(U, V, \dots) \quad (34)$$

Choć niekoniecznie musi być to prawdziwe, zakładamy że najbardziej wiarygodną estymatą wartości średniej  $\langle x \rangle$  jest

$$\langle x \rangle = f(\langle u \rangle, \langle v \rangle, \dots) \quad (35)$$

Nieokreśloność wyniku wyznaczenia wartości  $x$  może być oszacowana na podstawie zbioru wszystkich wartości  $x_i$  wyznaczonych z poszczególnych pomiarów ( $u_i, v_i, \dots$ ):

$$x_i = f(u_i, v_i, \dots) \quad (36)$$

W granicy nieskończonej liczby pomiarów, wartość średnia populacji pierwotnej wielkości  $X$  staje się dokładnie równa wartości średniej  $\langle x \rangle$  wyznaczonej zgodnie z r. (35). Stosując definicję wariancji, r. (12) możemy wyznaczyć  $\sigma_x^2$ :

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2 \quad (37)$$

Odchylenia ( $x_i - \langle x \rangle$ ) możemy wyrazić poprzez odchylenia ( $u_i - \langle u \rangle$ ), ( $v_i - \langle v \rangle$ ), ... rozwijając r.(34) w szereg Taylora wokół punktu ( $\langle u \rangle, \langle v \rangle, \dots$ ). Jeżeli odchylenia są małe to z dobrym przybliżeniem możemy napisać:

$$(x_i - \langle x \rangle) = (u_i - \langle u \rangle) \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right) + (v_i - \langle v \rangle) \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right) + \dots \quad (38)$$

gdzie pochodne cząstkowe liczone są w punkcie ( $u = \langle u \rangle, v = \langle v \rangle, \dots$ ).

Podstawiając r. (38) do r. (37) możemy wyrazić wariancję  $\sigma_x^2$  poprzez wariancje  $\sigma_u^2$ ,  $\sigma_v^2, \dots$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &\approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i \left[ (u_i - \langle u \rangle) \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right) + (v_i - \langle v \rangle) \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right) + \dots \right]^2 \\ &\approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i \left[ (u_i - \langle u \rangle)^2 \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right)^2 + (v_i - \langle v \rangle)^2 \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(u_i - \langle u \rangle)(v_i - \langle v \rangle) \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right) \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (39a)$$

Pierwsze dwa człony r. (39a), zgodnie z definicją wariancji, redukują się do  $\sigma_u^2 \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right)^2$ ,  $\sigma_v^2 \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right)^2$ , ... bowiem pochodne cząstkowe nie zależą od  $N$ . Człon trzeci, zawierający iloczyn mieszany odchyleń możemy zapisać przez analogię jako  $\sigma_{UV}^2 \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right) \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right)$  gdzie nowy parametr,  $\sigma_{UV}^2$ , **kowariancja** zmiennych  $U$  i  $V$ , zdefiniowana jest analogicznie do r. (8):

$$\sigma_{UV}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i (u_i - \langle u \rangle)(v_i - \langle v \rangle) \quad (40)$$

Ostatecznie mamy:

$$\sigma_x^2 \approx \sigma_u^2 \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right)^2 + \sigma_v^2 \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right)^2 + 2\sigma_{uv}^2 \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right) \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right) + \dots \quad (39b)$$

Jeżeli poza  $U$  i  $V$  wielkość  $X$  zależy jeszcze od innych zmiennych, r. (39) będą zawierały oczywiście analogiczne przyczynki od pozostałych zmiennych mierzonych bezpośrednio.

Wprowadzona powyżej kowariancja  $\sigma_{uv}^2$  jest miarą współzmienności parametrów  $u$  i  $v$  (w ogólności - dwóch dowolnie wybranych parametrów) to znaczy miarą równoczesnych odchyień wartości  $u$  i  $v$ . Jeżeli możemy zrobić założenie, że fluktuacje wartości  $u$  i  $v$  są nieskorelowane, to wtedy średnio możemy oczekiwać znalezienia w przybliżeniu równej liczby ujemnych i dodatnich wartości iloczynu  $(u_i - \langle u \rangle)(v_i - \langle v \rangle)$  i w granicy nieskończonej liczby pomiarów, znikania kowariancji  $\sigma_{uv}^2$ .

Jeśli fluktuacje wyników ( $u$ ,  $v$ , ...) są nieskorelowane, to r. (39b) upraszcza się dodatkowo do postaci:

$$\sigma_x^2 \approx \sigma_u^2 \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right)^2 + \sigma_v^2 \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right)^2 + \dots \quad (39c)$$

--- ooo 000 ooo ---

*Przykład 7.* Równanie (39c) wykorzystaliśmy wyznaczając estymację wariancji wartości średniej (patrz r. (28) i (33)). Wartość średnią wyznaczamy pośrednio z  $N$  pomiarów bezpośrednich. Zakładamy, że te pomiary są niezależne i fakt ten prowadzi do wniosku, że wariancja wartości średniej jest sumą ważoną wariancji poszczególnych pomiarów.

--- ooo 000 ooo ---

*Przykład 8.* Poniżej podano kilka prostych przykładów związków funkcyjnych między wielkością badaną  $X$  a mierzonymi wielkościami  $U$  i  $V$ , często spotykanych w praktyce.

a)  $X = aU \pm bV$

Pochodne cząstkowe wynoszą  $(\partial X / \partial U) = a$  i  $(\partial X / \partial V) = b$ . Z r. (39) mamy:

$$\sigma_x^2 = a^2 \sigma_u^2 + b^2 \sigma_v^2 \pm 2ab \sigma_{uv}^2$$

b)  $X = \pm aUV$ .

Pochodne cząstkowe wynoszą  $(\partial X / \partial U) = \pm aV$  i  $(\partial X / \partial V) = \pm aU$ . Mamy więc:

$$\sigma_x^2 = a^2 V^2 \sigma_u^2 + b^2 U^2 \sigma_v^2 + 2a^2 UV \sigma_{uv}^2, \quad \text{lub}$$

$$\sigma_x^2 / X^2 = \sigma_u^2 / U^2 + \sigma_v^2 / V^2 + 2\sigma_{uv}^2 / UV$$

c)  $X = \pm aU^{\pm b}$

Pochodna wynosi  $(\partial X / \partial U) = \pm bX / U$  i

$$\sigma_x^2 = (b^2 X^2 / U^2) \sigma_u^2, \quad \text{lub}$$

$$\sigma_x^2 / X^2 = b^2 \sigma_u^2 / U^2$$

$$\text{d) } \underline{X = ae^{\pm bU}}$$

Pochodna wynosi  $(\partial X / \partial U) = \pm bX$  i

$$\sigma_x^2 = b^2 X^2 \sigma_U^2, \quad \text{lub}$$

$$\sigma_x^2 / X^2 = b^2 \sigma_U^2$$

$$\text{e) } \underline{X = a \ln(\pm bU)}$$

Pochodna wynosi  $(\partial X / \partial U) = a/U$  i

$$\sigma_x^2 = a^2 \sigma_U^2 / U^2$$

--- ooo 000 ooo ---

Powyższe rozważania dotyczyły związków pomiędzy wariancjami pierwotnymi wielkości badanej  $X$  i wielkości mierzonych bezpośrednio ( $U, V, \dots$ ). Będziemy zakładać, że związki, a w szczególności r. (39b) i (39c) są słuszne również dla związków pomiędzy wariancjami próby wielkości  $X$  i wariancjami prób wielkości  $U, V, \dots$  t.j. najbardziej wiarygodną estymatą wariancji próby wielkości badanej pośrednio  $X$  jest:

$$s_x^2 \approx s_U^2 \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right)^2 + s_V^2 \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right)^2 + 2s_{UV}^2 \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right) \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right) + \dots \quad (41a)$$

lub, jeśli pomiary  $u, v, \dots$  są nieskorelowane,  $s_{UV}^2 = 0$ ,

$$s_x^2 \approx s_U^2 \left( \frac{\partial X}{\partial U} \right)^2 + s_V^2 \left( \frac{\partial X}{\partial V} \right)^2 + \dots \quad (41b)$$

Zwróćmy uwagę, że zbiory wyników  $u, v, \dots$  nie koniecznie muszą być jednakowo liczne, w związku z czym każda z wariancji liczona jest niezależnie, uwzględniając licznosc próby i założony kształt rozkładu (Gaussa lub Studenta). Jeżeli którakolwiek z prób jest nieliczna ( $N < 6$ ), należy uwzględnić współczynnik Studenta tak aby doprowadzić oszacowaną wartość wariancji do tego samego poziomu ufności ( $p = .683$ ) przed wyznaczeniem ze wzorów r. (41) estymaty wariancji badanej wielkości.

Przedstawiony przypadek badań pośrednich był najprostszym z możliwych. Wykonaliśmy wielokrotny pomiar wielkości  $U, V, \dots$ , znaleźliśmy wartości średnie ( $\langle u \rangle, \langle v \rangle, \dots$ ) i estymaty wariancji ( $s_U^2, s_V^2, \dots$ ) a następnie obliczyliśmy wartość średnią  $\langle x \rangle = f(\langle u \rangle, \langle v \rangle, \dots)$  i estymatę wariancji  $s_x^2$ . Przykładem takiego doświadczenia jest próba wyznaczenia ciężaru właściwego dowolnej bryły. Aby ją wyznaczyć wielokrotnie mierzymy objętość bryły  $V$  i jej wagę  $P$ . Obliczamy wartości średnie  $\langle V \rangle$  i  $\langle P \rangle$  oraz wariancje  $\sigma_V^2$  i  $\sigma_P^2$ . Znajdujemy wartość średnią ciężaru właściwego zgodnie z dobrze znanym wzorem  $\langle \rho \rangle = \langle P \rangle / \langle V \rangle$  i odchylenie standardowe z r. (41).

Wyobraźmy sobie teraz bardzo podobne doświadczenie polegające na wyznaczeniu ciężaru właściwego skały,  $\rho_s$ , której różne próbki dostarczono do badania. Dla każdej próbki musimy powtórzyć procedurę opisaną powyżej, t.j. wyznaczyć wartość średnią ciężaru właściwego i wariancję tej próbki. Następnie, po zbadaniu wszystkich próbek, wyznaczyć trzeba średnią wartość  $\langle \rho \rangle$  skały zgodnie ze wzorem (32), t.j. ważąc  $\langle \rho_s \rangle_i$  każdej próbki



przez  $1/s_i^2$ . Można jednak  $\langle \rho \rangle$  wyznaczyć w sposób bardziej elegancki, korzystając z wartości średnich  $\langle V \rangle_i$  i  $\langle P \rangle_i$  oraz wariancji  $(s_V^2)_i$  i  $(s_P^2)_i$  każdej z próbek. W tym celu zauważmy, że zgodnie z definicją  $P = \rho V$ , ciężar próbki jest proporcjonalny do jej objętości a ciężar właściwy jest współczynnikiem proporcjonalności. W związku z czym, Jeśli sporządzimy wykres zależności między  $P$  i  $V$  to w przypadku idealnych, bezbłędnych pomiarów wszystkie wyniki, t.j. pary wartości  $(\langle v \rangle_i, \langle p \rangle_i)$  powinny ułożyć się wzdłuż prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i nachylonej pod kątem,  $\text{tg}(\alpha) = \rho$ , do osi odciętych. Ze względu na fluktuacje wyników pomiarów, punkty doświadczalne będą jednak rozrzucone wokół tej prostej i problem, przed którym stajemy, polega na jak najbardziej wiarygodnej estymacji prawdziwego przebiegu tej prostej. Szukamy sposobu na takie poprowadzenie przez rozrzucone punkty pomiarowe prostej aby była ona najbardziej wiarygodnym przybliżeniem prawdziwego związku  $P = \rho V$ .

### 2.2.2. Badanie związków funkcyjnych między wielkościami mierzonymi bezpośrednio.

Przedstawiony powyżej problem jest prostym przykładem sytuacji kiedy chcemy nie tyle wyznaczyć wartość wielkości badanej pośrednio co określić związek funkcyjny między wielkościami badanymi bezpośrednio w doświadczeniu. Niech tymi wielkościami będą dwie wielkości  $X$  i  $Y$ . Chcemy znaleźć taką funkcję  $f$  aby  $Y = f(X)$ . Zamiast wykonywania szeregu pomiarów wielkości  $V$  dla określonej wartości wielkości  $X$ , wykonujemy  $N$  pomiarów  $y_i$ , każdy dla innej wartości  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), innymi słowy otrzymujemy zbiór  $N$  par wartości  $(x_i, y_i)$ . Naszym zadaniem jest:

- (i) -ustalenie, albo co najmniej oszacowanie, charakteru funkcji  $f$  na podstawie wcześniejszych badań lub rozważań teoretycznych;
- (ii) -znalezienie takich wartości stałych parametrów równania  $Y = f(X)$  aby funkcja  $f$  była najbardziej wiarygodną estymatą prawdziwego związku między  $X$  i  $Y$ . Krótko mówiąc, będziemy się starali jak najlepiej dopasować funkcję  $f$  do punktów doświadczalnych.

W ogólności, funkcja może być zdefiniowana przez wiele różnych współczynników (parametrów), Jak na przykład w przypadku wielomianu, i problem jest równoznaczny z optymalnym wyznaczeniem wartości wielkości badanych pośrednio ( $\equiv$  parametrów równania  $Y = f(X)$ ) na podstawie zbioru punktów pomiarowych  $\{x_N, y_N\}$ . W większości przypadków spotykanych w trakcie wykonywania doświadczeń w Pracowni Fizycznej I związku funkcyjne albo są, albo dają się łatwo sprowadzić do związków liniowych, t.j. są postaci:

$$Y = \alpha + \beta X \tag{42}$$

Zajmiemy się teraz omówieniem metody wyznaczania najbardziej wiarygodnych estymat parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  oraz oszacowania niepewności ich wyznaczenia.

Jak wspomniano powyżej, jest niemożliwe poprowadzić linię prostą dokładnie przez wszystkie  $N$  punktów pomiarowych. Musimy założyć, że obserwowane fluktuacje położenia punktów pomiarowych powyżej i poniżej prostej są następstwem jedynie niepewności wyników pomiarów a nie odbiciem jakiegoś szczególnego zjawiska fizycznego. Słuszność tego założenia powinna być sprawdzana w każdym szczególnym przypadku, zarówno na gruncie rozważań teoretycznych jak i w drodze sprawdzenia powtarzalności indywidualnych pomiarów; należy być szczególnie uczulonym na możliwość występowania błędów grubych i systematycznych.

Wyobraźmy sobie na chwilę, że ustalamy wartość wielkości  $X$ ,  $x = x_i$ , a następnie wykonujemy serię pomiarów wielkości  $Y$ ,  $y = y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, \dots$ . Ze względu na ten często stosowany sposób postępowania przyjęło się nazywać wielkość ustaloną - wielkością

**niezależna**, wielkość mierzona – wielkością **zależną**. W wyniku przeprowadzonych pomiarów powinniśmy spodziewać się dyspersji wyników  $y_{ik}$  wokół wartości średniej  $\langle y_i \rangle$ , dokładnie tak samo jak to było w przypadku pomiarów bezpośrednich. Ponadto, zgodnie z probabilistyczną interpretacją odchylenia standardowego możemy oczekiwać, że dowolny pomiar  $y_{ik}$  będzie się różnił od  $\langle y_i \rangle$  o mniej więcej  $\sigma_y$ . Mając możliwość zwiększenia liczby pomiarów moglibyśmy określić  $\langle y_i \rangle$  z dokładnością ograniczoną jedynie rozkładem pierwotnym.

Na wstępie obecnych rozważań założyliśmy jednak, że wykonujemy tylko jeden pomiar  $y_i$  dla każdego ustalonego  $x_i$ . W konsekwencji, dla każdej ustalonej wartości  $x$  wyznaczamy  $y$  z nieoznaczonością charakteryzowaną przez odchylenie standardowe populacji pierwotnej dostępnych wartości  $y$ . Oczywiście może się zdarzyć, że dyspersja wartości  $y$  wokół wartości średniej populacji, a tym samym i  $\sigma_y$  nie zależą od wartości  $x$ , jednak zależęć to będzie od konkretnych warunków doświadczenia jak i badanego problemu. W ogólności powinniśmy zawsze brać pod uwagę możliwość tego, że nie tylko  $y$  ale również i odchylenie standardowe  $\sigma_y$  jest funkcją warunków eksperymentu a więc i wartości  $x$ .

(a) *Niepewności pomiarów bezpośrednich.*

Dla przejrzystości dalszych rozważań zakładamy, że niepewność wyniku możemy przypisać tylko i wyłącznie zmiennej zależnej  $y$ . Jest to równoznaczne z założeniem, że precyzja określenia  $x$  jest znacznie większa aniżeli  $y$ , t.j. będziemy uważać wielkość niezależną jako wyznaczoną dokładnie, całą 'winą' za błędy obarczając zmienną zależną. Oczywiście takie założenie nie zawsze musi być usprawiedliwione. Czasami niepewności wyznaczenia  $x$  i  $y$  są porównywalne. Okazuje się jednak, że procedura najbardziej wiarygodnego dopasowywania, którą przedstawimy za chwilę, pozostanie w miarę słuszną jeżeli połączymy niepewności obu wielkości i przypiszemy łączną niepewność - wielkości zależnej. Będziemy więc mogli wykonywać dalsze obliczenia traktując zmienną niezależną jako 'bezbłędną', fluktuacje przypisując całkowicie zmiennej zależnej z pełną świadomością, że ich źródłem mogą być obie zmienne.

Na koniec zauważmy, że w przypadku kiedy fluktuacje wielkości  $X$  przewyższają fluktuacje  $Y$ , prawie zawsze możemy przeddefiniować zmienne i dopasowywać funkcję odwrotną  $X=f^{-1}(Y)$  do punktów doświadczalnych.

(b) *Metoda Najmniejszych Kwadratów, (MNK).*

Dane składają się z  $N$  punktów pomiarowych, t.j. par  $(x_i, y_i)$  wyników pomiarów zmiennej niezależnej  $X$  i zmiennej zależnej  $Y$ . Naszym zadaniem jest dopasować do tych danych prostą o równaniu:

$$y = a + bx, \tag{43}$$

tzn. znaleźć takie wartości parametrów  $a$  i  $b$  dla których różnica między wartościami pomiarów  $y_i$  a odpowiadającymi im wartościami  $y = f(x_i) = a + bx_i$  jest najmniejsza. Ze skończonej liczby punktów pomiarowych nie możemy znaleźć prawdziwych wartości parametrów, t.j.  $\alpha$  i  $\beta$  (patrz r. (42)), ale chcemy aby wyznaczone wartości  $a$  i  $b$  były najbardziej wiarygodnymi estymatami wartości prawdziwych. Problem polega na znalezieniu metody, która pozwoli na zminimalizowanie różnic a jednocześnie na zoptymalizowanie estymat parametrów.

Dla każdych dowolnie wybranych wartości  $a$  i  $b$  możemy policzyć odchylenia  $\Delta y_i$  pomiędzy każdą zmierzoną wartością  $y_i$  a odpowiadającą jej wartością teoretyczną:

$$\Delta y_i = y_i - a - bx_i \quad (44)$$

Jeżeli współczynniki  $a$  i  $b$  są dobrze dobrane, odchyłki te powinny być względnie małe. Używając dokładnie tej samej argumentacji jak dla pomiarów bezpośrednich w par.2.1.7, możemy oczekiwać, że suma kwadratów odchyłek dla wszystkich punktów pomiarowych będzie dobrą miarą dobroci oszacowania wartości parametrów.

Niestety, nie ma jednoznacznie poprawnej, uniwersalnej i zawsze słusznej metody optymalizacji parametrów. Istnieje jednakże metoda, której stosowalność można w miarę prosto uzasadnić, metoda która jest prosta i łatwa w użyciu, która w wielu praktycznych zastosowaniach doświadczalnych sprawdziła się i jest powszechnie przyjęta w praktyce. Jest to *metoda najmniejszych kwadratów*, którą już poznaliśmy i którą obecnie rozszerzymy na przypadek więcej niż jednej zmiennej (parametru).

Niech prawdziwy związek między  $x$  i  $y$  ma postać

$$y(x) = a + \beta x$$

Analogicznie jak w przypadku pomiarów bezpośrednich, dla każdej określonej wartości  $x=x_i$  wyliczamy prawdopodobieństwo  $dP_i$  zmierzania zaobserwowanej wartości  $y_i$ . Zakładamy, że populacja pierwotna dostępnych wartości  $y$  jest gaussowska z centrum w  $y(x_i)$  i z odchyleniem standardowym  $\sigma_i$ :

$$dP_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 \right] dx_i \quad (45)$$

Ponieważ zbiór wyników składa się z  $N$  punktów  $(x_i, y_i)$ , prawdopodobieństwo jego trzymania, t.j. prawdopodobieństwo uzyskania takiej właśnie próby wynosi:

$$P(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N dP_i = \prod_{i=1}^N \left( \frac{dx_i}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{y_j - y(x_j)}{\sigma_j} \right)^2 \right] \quad (46)$$

Jeżeli prawdziwy związek między  $x$  i  $y$  zastąpimy jego estymatą, r. (43), to analogicznie możemy napisać:

$$P(a, b) = \prod_{i=1}^N \left( \frac{dx_i}{s_i \sqrt{2\pi}} \right) \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{\Delta y_j}{s_j} \right)^2 \right] \quad (47)$$

które jest prawdopodobieństwem uzyskania naszej próby w warunkach kiedy centrum populacji leży na prostej  $a + bx$  a odchylenie standardowe jest identyczne z odchyleniem standardowym próby. Intuicyjnie możemy oczekiwać, że im estymata prostej jest bliższa jej prawdziwemu przebiegowi, tym  $P(a, b)$  będzie większe i odwrotnie, im bardziej będzie odbiegać, tym  $P(a, b)$  będzie mniejsze. Musimy zatem znaleźć takie  $a$  i  $b$ , które maksymalizują  $P(a, b)$ .

Zauważmy, że pierwszy człon r. (47) jest stały względem  $a$  i  $b$ , oraz że wykładnik funkcji wykładniczej jest ujemny. Zadanie maksymalnej wartości  $P(a,b)$  jest więc równoważne z żądaniem minimalnej wartości bezwzględnej wartości wykładnika:

$$\chi^2 = \sum_i \left( \frac{\Delta y_i}{s_i} \right)^2 = \text{minimum} \quad (48)$$

$\chi^2$  jest ważona sumą kwadratów odchyłek wartości  $y_i$  od odpowiadających im wartości teoretycznych. Żądanie minimum  $\chi^2$  jest więc żądaniem uzyskania najmniejszej sumy kwadratów odchyłek i stanowi podstawę *metody najmniejszych kwadratów*.

W ogólnym przypadku funkcja  $y=y(x)$  może być dowolna i poszukiwanie minimum  $\chi^2$  nie jest sprawą trywialną, wymagającą często stosowania wyrafinowanych technik minimalizacyjnych. Jeśli jednak  $y(x)$  jest wielomianem ze względu na zmienną niezależną,  $y(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ , lub da się do takiej postaci sprowadzić, wówczas znalezienie wartości parametrów  $a_k$  minimalizujących  $\chi^2$  jest sprawą prostą, bowiem warunki minimum funkcji  $\chi^2$ , t.j.  $(\partial \chi^2 / \partial a_k) = 0$  prowadzą do układu  $n$  równań liniowych ze względu na  $n$  - parametrów, którego rozwiązanie nie przedstawia trudności. Takim przypadkiem jest obecny problem poszukiwania najlepszej estymaty liniowego związku między  $x$  i  $y$ . Warunek minimum  $\chi^2$  jest równoważny równoczesnemu spełnieniu warunków:

$$(\partial \chi^2 / \partial a) = 0 \quad \text{oraz} \quad (\partial \chi^2 / \partial b) = 0 \quad (49)$$

Rozpatrzmy najpierw prostszy przypadek kiedy odchylenia standardowe  $s_i$  są dla wszystkich punktów jednakowe, t.j.  $s = s_i, i = 1, \dots, N$ . Przypadek taki często spotykamy w praktyce. Na przykład, wykonując pomiar temperatury termometrem cieczowym posługujemy się skalą liniową i fluktuacje wyników będą dokładnie takie same w obrębie całej skali termometru. Podobnie jest z większością mierników prądu elektrycznego w obrębie każdego zakresu pomiarowego. Klasa przyrządu definiuje stały dla całego zakresu błąd pomiaru.

Suma kwadratów odchyłeń przyjmuje postać:

$$\chi^2 = \frac{1}{s^2} \sum_i (y_i - a - bx_i)^2 \quad (50)$$

Różniczkując, najpierw względem  $a$ , potem względem  $b$ , otrzymujemy układ dwóch równań:

$$\left. \begin{aligned} \sum_i (y_i - a - bx_i) &= 0 \\ \sum_i (y_i - a - bx_i)x_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

albo, po uwzględnieniu faktu, że  $\sum(1) = N$  i przekształceniach,

$$\left. \begin{aligned} aN + b \sum_i x_i &= \sum_i y_i \\ a \sum_i x_i + b \sum_i x_i^2 &= \sum_i x_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Rozwiązaniem tego układu są wartości:

$$\begin{aligned} a &= (\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i) / W \\ b &= (N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i) / W \\ W &= N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2 \end{aligned} \quad (53)$$

Tak wyznaczone wartości  $a$  i  $b$  są najbardziej wiarygodnymi estymatami współczynników prostej. Pozostaje jeszcze dokonać estymacji wariancji  $s_a^2$  i  $s_b^2$ . W tym celu korzystamy z faktu, że  $a$  i  $b$  są wielkościami wyznaczonymi (badanymi) pośrednio i wariancje obu parametrów możemy obliczyć zgodnie z r. (39c):

$$\left. \begin{aligned} s_a^2 &= \sum_i s_i^2 (\partial a / \partial y_i)^2 = s^2 \sum_i (\partial a / \partial y_i)^2 \\ s_b^2 &= \sum_i s_i^2 (\partial b / \partial y_i)^2 = s^2 \sum_i (\partial b / \partial y_i)^2 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Wyliczenie pochodnych nie przedstawia trudności. Odchylenie standardowe  $s$  wyznaczmy korzystając z definicji najlepszej estymaty odchylenia standardowego populacji, na podstawie próby. Zgodnie z tą definicją, estymata jest równa ilorazowi sumy kwadratów odchylen przez liczbę stopni swobody. Ponieważ liczba parametrów, które wyznaczamy ( $a$  i  $b$ ) jest 2 a liczność próby  $N$  więc liczba stopni swobody wynosi  $N-2$  i:

$$s^2 = \frac{1}{N-2} \sum_i \Delta y_i^2 \quad (55)$$

Po wyliczeniu pochodnych i przekształceniach otrzymujemy najbardziej wiarygodne estymaty wariancji parametrów:

$$s_a^2 = \frac{s^2}{W} \sum_i x_i^2 \quad \text{oraz} \quad s_b^2 = \frac{s^2}{W} N, \quad (56)$$

$s^2$  i  $W$  zdefiniowane jak wyżej.

Rozważmy teraz ogólny przypadek, kiedy odchylenia standardowe  $s_i$  są różne dla różnych punktów pomiarowych. Taka sytuacja wystąpi wtedy gdy, na przykład, w trakcie pomiarów zmienimy skalę przyrządu lub gdy skala przyrządu jest nieliniowa i niepewności wyniku nie są jednakowe w całym zakresie pomiarowym. W takiej sytuacji  $\chi^2$  należy liczyć bezpośrednio z r. (48). Warunek r. (49) prowadzi do układu równań:

$$\left. \begin{aligned} \sum_i 1/s_i^2 (y_i - a - bx_i) &= 0 \\ \sum_i 1/s_i^2 (y_i - a - bx_i)x_i &= 0 \end{aligned} \right\}$$

lub, po przekształceniu,

$$\left. \begin{aligned} a \sum_i 1/s_i^2 + b \sum_i x_i/s_i^2 &= \sum_i y_i/s_i^2 \\ a \sum_i x_i/s_i^2 + b \sum_i x_i^2/s_i^2 &= \sum_i x_i y_i/s_i^2 \end{aligned} \right\}, \quad (58)$$

który jest odpowiednikiem r. (53). Rozwiązaniem tego układu są wartości:

$$\begin{aligned} a &= (\sum_i x_i^2/s_i^2 \sum_i y_i/s_i^2 - \sum_i x_i/s_i^2 \sum_i x_i y_i/s_i^2) / W \\ b &= (\sum_i 1/s_i^2 \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i/s_i^2 \sum_i y_i/s_i^2) / W \\ W &= \sum_i 1/s_i^2 \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i/s_i^2)^2 \end{aligned} \quad (59)$$

Jak łatwo sprawdzić, jeżeli wszystkie odchylenia standardowe są takie same, to r. (59) redukuje się do r. (53).

Postępując analogicznie jak poprzednio możemy wyznaczyć wariancje  $s_a^2$  i  $s_b^2$ :

$$s_a^2 = \frac{1}{W} \sum_i x_i^2/s_i^2 \quad \text{oraz} \quad s_b^2 = \frac{1}{W} \sum_i 1/s_i^2, \quad (60)$$

które redukują się do r. (56) w przypadku identycznych  $s_i$  dla wszystkich punktów.

Należy zaznaczyć bardzo istotny fakt, że  $s_i$  nie można wyznaczyć na podstawie posiadanej próby bowiem, zgodnie z założeniem, dla każdej wartości  $x = x_i$  wykonaliśmy tylko *jeden* pomiar  $y = y_i$ . Dla każdego punktu odchylenie musi być oszacowane niezależnie, albo na podstawie analizy układu pomiarowego (klasy przyrządów, ich zakresy, zmiany zakresów itp.) albo na podstawie uzupełniających badań eksperymentalnych, t.j. przez wielokrotne powtórzenie pomiaru  $y_i$  i stąd oszacowanie odchylenia standardowego. Oznacza to, że MNK nie jest ograniczona do przypadku jednokrotnego wyznaczenia punktu doświadczalnego  $(x_i, y_i)$ , lecz może być stosowana do ogólnego przypadku kiedy nie znając  $s_i$  zmuszeni jesteśmy do wielokrotnego powtarzania pomiaru  $y_i = \{y_{i1}, y_{i2}, \dots\}$  dla tej samej wartości  $x_i$  zmiennej niezależnej. Na podstawie takiej próby możemy wyznaczyć  $\langle y_i \rangle$  oraz  $s_i^2$  a dopasowanie przeprowadzić dla punktów  $(x_i, \langle y_i \rangle)$ . Jest to dokładnie sytuacja z naszego przykładu z wyznaczaniem ciężaru właściwego skały.

Jak argumentowaliśmy, cały błąd pomiarowy związany z wyznaczeniem tak  $x_i$  jak i  $y_i$  można, w większości przypadków, z dobrym przybliżeniem przypisać zmiennej zależnej  $y$ , odpowiednio kumulując przyczynki od obu zmiennych. Należy jednak pamiętać, że dodając do wariancji  $s_{y_i}^2$  przyczynki od zmiennej niezależnej  $x$ , jeśli jest on rzeczywiście istotny, musimy go 'przeskalować' z jednostek zmiennej niezależnej do jednostek zmiennej zależnej. W przypadku liniowej zależności między zmiennymi, czynnikiem zmieniającym skalę jest

współczynnik kierunkowy prostej, t.j.  $b$  i efektywną wariancją przypisywaną zmiennej  $y$  powinna być:

$$s_{y_i}^2 \equiv s_{y_i}^2 + b^2 s_{x_i}^2 \quad (61)$$

Założenie powyższe wydaje się być intuicyjnie usprawiedliwione i, jak można pokazać, jest prawdziwe (*Brandt, par.9-4*).

Jeżeli warunki doświadczenia wymagają posługiwania się efektywną wariancją  $r$ . (61), musimy zdać sobie sprawę z tego, że punkty pomiarowe będą teraz ważone wagą  $(1/s_{y_i}^2)$ , która **zależy** od  $b$ ! Oczywiście komplikuje to obliczenia, będzie bowiem wymagało uzgodnienia wartości  $b$  stosowanej w r. (66) z wartością wyznaczoną MNK, tzn., powtarzania obliczeń dla różnych wartości  $b$  aż do momentu uzyskania zgodności między wartością 'początkową' parametru  $b$  a wyliczoną. Na szczęście do celów praktycznych wykonywalnie takiej żmudnej operacji samouzgodnienia  $b$  nie jest konieczne. Jeżeli potrafimy przed przystąpieniem do obliczeń w miarę dobrze oszacować  $b$ , na przykład metodą graficzną prowadząc przez punkty pomiarowe prostą tak aby jak najwięcej punktów leżało na tej prostej a pozostałe były równomiernie rozrzucone po obu jej stronach, a następnie wyznaczając  $b \approx \Delta y / \Delta x$ , to, jak można sprawdzić, wyliczona MNK estymata tego parametru jedynie nieznacznie będzie odbiegać od najbardziej wiarygodnej i nie popełnimy wielkiego błędu traktując wyniki obliczeń jako najbardziej wiarygodne estymaty parametrów i ich wariancji.

Już na początku tego opracowania zwróciliśmy uwagę na fakt, że na niepewność ostatecznego wyniku wpływa nie tylko precyzja pomiarów bezpośrednich ale również poprawność przyjętego modelu teoretycznego (matematycznego) badanego zjawiska. Weźmy pod uwagę wspomniany przypadek wyznaczania średniego ciężaru właściwego skały. Ciężar każdej próbki jest wprost proporcjonalny do jej objętości  $V$  i jest to oczywiście związek liniowy, tyle że współczynnik  $\alpha$  z powodów fizycznych **musi** być równe 0. Przy założeniu, że nie popełniamy w trakcie pomiarów błędów systematycznych, powinniśmy zatem oczekiwać, że prosta dopasowana do punktów doświadczalnych będzie postaci  $y = bx + e$ , gdzie  $e$  w granicach błędu powinno być równe 0. W większości warunków eksperymentalnych, założenie o braku błędów systematycznych jest wątpliwe, w związku z czym należy zawsze starać się ustalić, czy wystąpienie niezerowej wartości  $e$  jest następstwem fluktuacji czy też systematycznego odchylenia. Jeżeli związek między  $X$  i  $Y$  jest rzeczywiście liniowy, to dopasowanie prostych  $y(x) = a_y + b_{yx}x$  oraz  $x(y) = a_x + b_{xy}y$  powinno dać ten sam wynik, t. j.  $a_x = -a_y/b_y$  oraz  $b_x = 1/b_y$ , a ewentualne rozbieżności powinny mieścić się w granicach błędów wynikających z fluktuacji pomiarowych. Jeśli mamy przesłanki sądzić, że  $X$  i  $Y$  są wzajemnie proporcjonalne powinniśmy:

- (i) wyznaczyć parametry dopasowania  $y(x) = b_{yx}x + \varepsilon_y$ ;
- (ii) wyznaczyć parametry dopasowania  $x(y) = b_{xy}y + \varepsilon_x$ ;
- (iii) sprawdzić czy  $b_x b_y \approx 1$ ;
- (iv) sprawdzić czy  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$  są w granicach dopuszczalnych przez fluktuacje równe 0.

Jeżeli tak jest, to do wyników doświadczalnych powinniśmy dopasowywać prostą

$$y = bx \quad (62)$$

nawet gdyby się okazało, że dopasowanie prostej  $y=a+bx$  daje mniejszą wartość  $\chi^2$ . Estymaty parametru i wariancji w ogólnym przypadku wynoszą:

$$b = \frac{\sum_i (x_i y_i / s_i^2)}{\sum_i x_i^2 / s_i^2}$$

$$s_b^2 = 1 / \sum_i x_i^2 / s_i^2$$

Jeśli jednak  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$  konsystentnie znacznie się różnią od 0, należy podejrzewać obecności błędów systematycznych i starać się ustalić ich źródło, tak aby można było przypisać poprawną interpretację oszacowanym wartościom współczynnika kierunkowego prostej i jego wariancji.

(c) *Kalibracja układu pomiarowego.*

Często się zdarza, że poszukujemy związku między  $X$  i  $Y$  nie tyle w celu zbadania zjawiska fizycznego co wykalibrowania przyrządu pomiarowego. Tak postępujemy przy kalibracji termometrów, mierników elektrycznych itp.

--- ooo 000 ooo ---

*Przykład 9.* Weźmy na przykład kalibrację amperomierza. W tym celu wyposażamy go w skalę, która w procesie kalibracji będzie pełnić rolę zmiennej zależnej  $x$ , a następnie przez przyrząd przepuszczamy prąd elektryczny o ściśle określonej, przy pomocy innego - wzorcowego- amperomierza, wartości natężenia prądu  $J$  (zmienna niezależna). Po zebraniu dostatecznej liczby punktów pomiarowych w całym zakresie dopuszczalnych natężeń, MNK dopasowujemy do tych wyników przewidywaną zależność  $X=X(J;a',b',...)$ , wyznaczając wartości parametrów i ich wariancje. Posługiwanie się przyrządem pomiarowym przebiega z reguły odwrotnie, t.j. określonej wartości na skali przypisujemy wartość prądu. Wskazania na skali będą teraz spełniać rolę zmiennej niezależnej, natężenie prądu- zależnej. Aby móc posłużyć się wyskalowanym przyrządem należy wyznaczyć funkcję odwrotną,  $J=J(X;a,b,...)$ , wyliczyć wartości parametrów i wariancji zgodnie z ogólną filozofią r. (39). Pytanie, które się natychmiast pojawia, to problem propagacji błędów kalibracji na wynik pomiaru natężenia prądu wyskalowanym amperomierzem. Jaka jest niepewność wartości prądu jeżeli amperomierz wskazuje określoną wartość na skali, t.j., jaka jest niepewność wartości  $J(X;a,b,...)$ ?

--- ooo 000 ooo ---

Niech kalibracja przyrządu będzie liniowa i dana r. (43) o wyznaczonych MNK parametrach i wariancjach. Poszukujemy wariancji  $s_y^2$  dla dowolnej wartości zmiennej niezależnej  $x$ . Zgodnie z r. (39) obliczamy

$$s_y^2 = s_a^2 \left( \frac{\partial y}{\partial a} \right) + s_b^2 \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) + 2s_{ab} \left( \frac{\partial y}{\partial a} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \quad (64)$$

Zwróćmy uwagę, że w tym przypadku **musimy** uwzględnić współzmienniczość obu parametrów, bowiem jakakolwiek, nawet najmniejsza, zmiana wartości jednego z parametrów pociąga za sobą zmianę wartości drugiego. W ogólnym przypadku, kiedy wariancje  $s_i^2$  są różne, kowariancja  $s_{ab}^2$  wynosi



$$s_{ab}^2 = -\sum_i (x_i / s_i^2) / W \quad (65)$$

(W zdefiniowane r. (59)), co łatwo sprawdzić. Po wyliczeniu pochodnych i podstawieniu wzorów na wariancję i kowariancję do r. (64) otrzymujemy:

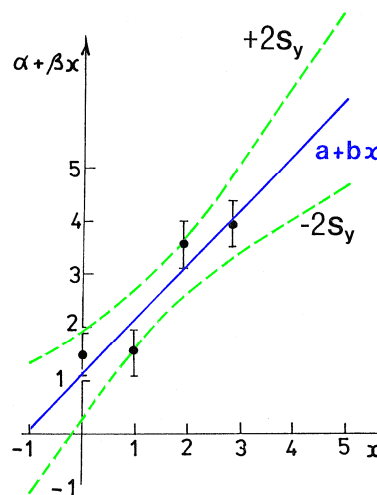
$$\begin{aligned} s_y^2 &= [\sum_i (1/s_i^2)x^2 - 2\sum_i (x_i/s_i^2)x + \sum_i (x_i^2/s_i^2)]/W \\ &= [\sum_i (x - x_i)^2 / s_i^2] / W \quad (W \rightarrow r.(59)) \end{aligned} \quad (66)$$

lub, dla przypadku jednakowych wariancji  $s=s_i$ ,

$$s_y^2 = \frac{s^2}{W} [N\bar{x}^2 - 2\sum_i x_i \bar{x} + \sum_i x_i^2] = \frac{s^2}{W} \sum_i (x - x_i)^2 = s^2 \left[ \frac{1}{N} + \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2} \right] \quad (67)$$

(W  $\rightarrow$  r.(53))

Należało oczekiwać, że wariancja  $s_y^2$ , a w konsekwencji i odchylenie standardowe,  $s_y$  będą funkcjami zmiennej niezależnej (która dla podkreślenia zaznaczono w r. (67) tłusta czcionką). Jest to zależność kwadratowa z minimum dla wartości  $x = \langle x \rangle$ . Minimalne odchylenie standardowe jest równe  $s_y = s / \sqrt{N}$  (jest to odchylenie standardowe średniej, por. r. (70)). W miarę oddalania się wartości  $x$  od  $\langle x \rangle$ , nieokreśloność wyznaczenia  $y$  na podstawie krzywej kalibracyjnej będzie wzrastała i tendencja ta będzie narastać z kwadratem odległości  $(x - \langle x \rangle)$ . Jest to dobrze widoczne na Rys.5, na którym zaznaczono punkty pomiarowe, dopasowaną prostą  $y=a+bx$  oraz granice przedziału ufności ( $y \pm 2s_y$ ) ( $p=.95$ ).



**Rys. 5** Najbardziej wiarygodna estymata liniowej zależności między wielkościami  $X$  i  $Y$ , na podstawie wyników pomiarów: (0.,1.4), (1.,1.5), (2.,3.7) i (3.,4.1). Metodą najmniejszych kwadratów otrzymano:  $a=1.13$ ,  $b=1.03$ ,  $s_a^2 = s_b^2 = .175$  oraz  $s_{ab}^2 = -.075$ . Linie oznaczają granice przedziału ufności zmiennej  $y=a+bx$ , na poziomie ufności  $p=.95$ .

Wzrost nieokreśloności wyznaczenia wartości  $y$  na podstawie krzywej kalibracyjnej, jest szczególnie istotny ze względu na aplikacyjne konsekwencje. Oznacza to bowiem, że stosowanie krzywej kalibracyjnej na granicach i poza obszarem kalibracji - nazywamy to **ekstrapolacją** krzywej kalibracji - jest obarczone znacznym błędem, co więcej, gwałtownie wzrastającym w miarę oddalania się od środka skali ( $\equiv$  przedziału zmienności zmiennej niezależnej  $x$ ).

Na tym zasadniczo zakończyliśmy omawianie podstawowych metod numerycznych redukcji i analizy danych doświadczalnych. Wiadomości zawarte w niniejszym opracowaniu są wystarczające do zrozumienia problemów na jakie napotykamy w praktyce doświadczalnej w Pracowni Fizycznej I. Omówione zostały oczywiście najprostsze i najczęściej spotykane przypadki analizy wyników, mając nadzieję, że w sytuacjach trudniejszych czytelnik odwoła się do dostępnej literatury fachowej.

## DODATEK

### KILKA UWAG NA TEMAT WYKONYWANIA POMIARÓW I OPRACOWYWANIA WYNIKÓW.

Cyfry znaczące i zaokrąglanie. Wpisując do Tabeli Wyników wyniki obliczeń pośrednich i wyniki końcowe należy zwrócić uwagę na to, że nie ma sensu podawać wartości estymat z wieloma znaczącymi cyframi jeśli niepewność jest duża, np. nie wolno pisać  $19.766167 \pm 48$  lecz  $19.77 \pm 48$ .

Równocześnie z problemem zaokrąglania wyników pojawia się konieczność wprowadzenia spójnego systemu zapisywania wyników, tak aby z sam zapis świadczył o precyzji pomiaru i obliczeń. W celu zaznaczenia precyzji pomiaru, zapisujemy wynik uwzględniając wszystkie znaczące cyfry. Liczba znaczących cyfr w wyniku definiowana jest następująco:

1. Pierwsza niezerowa cyfra od lewej jest cyfrą *najbardziej znaczącą*;
2. Przy braku kropki dziesiętnej (przyjmujemy numeryczną konwencję zapisu liczb, tzn. zamiast przecinka dziesiętnego będziemy używać kropki), pierwsza niezerowa cyfra od prawej jest cyfrą *najmniej znaczącą*,
3. Jeśli jest kropka dziesiętna, to pierwsza cyfra od prawej jest cyfrą *najmniej znacząca*, nawet jeśli jest to zero;
4. Wszystkie cyfry pomiędzy cyframi *najmniej* i *najbardziej znaczącymi* uważane będą za cyfry znaczące.

Na przykład, następujące liczby mają 4 cyfry znaczące: 7543; 754300; 754.3; 2001; 8000.; 20.50; .001020. W przypadku braku kropki dziesiętnej, dochodzi do dwuznaczności gdy pierwszą od prawej cyfrą jest 0; np. będziemy uważać, że 1010 posiada jedynie trzy cyfry znaczące nawet gdyby ostatnia cyfra miała znaczenie fizyczne. Aby uniknąć konfuzji musimy dodać kropkę dziesiętną lub zapisać taką liczbę w formie wykładniczej: 1010. lub  $1.010 \cdot 10^3$ .

Przy podawaniu wartości estymat jest bardzo ważne aby liczba cyfr znaczących była o jedną więcej niż wynika to z precyzji pomiaru. Powodem tego na pierwszy rzut oka dziwnego wymogu jest fakt, że czasami ostatnia cyfra znacząca jest gubiona w procesie dalszych obliczeń. **Błędy wywołane niedostateczną dokładnością obliczeń muszą być traktowane jako całkowicie nieusprawiedliwione!** Jeżeli we wszystkich wziętych do obliczeń liczbach

uwzględnimy dodatkową znaczącą cyfrę to początkowa (wyjściowa) precyzja zostanie praktycznie zachowana w wyniku końcowym.

Kiedy nieznaczące cyfry są odrzucane, ostatnia cyfra powinna być zaokrąglona celem uzyskania jak najlepszej ścisłości. Traktując odrzucane cyfry jako ułamek dziesiętny, np. powyżej podaliśmy przykład zaokrąglania wyniku 19.766167 do dwóch znaczących cyfr po kropce dziesiętnej; odrzucane cyfry traktowaliśmy jako .6167, zaokrąglamy zgodnie z poniższymi regułami:

1. Jeśli ułamek ten jest większy od  $1/2$  to należy zwiększyć najmniej znaczącą cyfrę o 1. Przykład: 19.76(6167)  $\rightarrow$  19.77.
2. Jeśli ułamek jest mniejszy niż  $1/2$ , najmniej znacząca cyfra pozostaje bez zmian. Przykład: 19.766(167)  $\rightarrow$  19.766.
3. Jeśli ułamek jest równy  $1/2$ , najmniej znaczącą cyfrę zwiększamy tylko wtedy gdy jest ona nieparzysta. Przykład: 6.90(500)  $\rightarrow$  6.90; 6.91(500)  $\rightarrow$  6.92.

Tabele wyników. Przez tabele wyników rozumiemy zestawienie zbiorcze wszystkich wyników:

- (i) pomiarów bezpośrednich z wyszczególnieniem jednostek,
- (ii) wartości stałych fizycznych wykorzystanych w obliczeniach,
- (iii) wyniki obliczeń pośrednich jak np. estymaty wartości średniej, miary błędu wielkości mierzonych bezpośrednio, oraz
- (iv) wyniki końcowe.

Tabele wyników przygotowujemy bezpośrednio przed przystąpieniem do pomiarów, kiedy zestaw pomiarowy jest gotowy do pomiaru i wiemy dokładnie co i jak będziemy mierzyć. Ponieważ często zestawy pomiarowe ulegają modyfikacji, przygotowywanie tabel "na zapas" mija się z celem.

Pomiary bezpośrednie. Przed przystąpieniem do pomiarów sprawdzić, jeśli to jest możliwe, czy przyrządy są sprawne na wszystkich zakresach pomiarowych.

Zanotować w Tabeli Wyników jednostki pomiarowe i klasę przyrządu (błąd aparaturowy). Należy zwrócić uwagę na to, że (i) bezwzględny błąd aparaturowy zmienia się od zakresu do zakresu, natomiast (ii) w obrębie tego samego zakresu pomiarowego względny błąd aparaturowy w dolnej części jest większy niż w górnej części zakresu; należy więc zawsze dążyć do tego aby wykonywać pomiary w górnej części zakresu.

Przy zmianie zakresu pomiarowego w trakcie pomiarów trzeba koniecznie powtórzyć kilka ostatnich pomiarów (np. 2 lub 3) na nowym zakresie. Umożliwi to "zszycie" wyników uzyskanych na sąsiednich zakresach pomiarowych.

Po wykonaniu kilku pomiarów sprawdzamy czy fluktuacje wyników mieszczą się w granicach błędu aparaturowego. Jeżeli fluktuacje przekraczają granice błędu aparaturowego, kontynuujemy pomiary do momentu gdy  $N \geq 7$ , co jest wystarczające do założenia o gaussowskim charakterze rozrzutu punktów pomiarowych. Jeżeli nie mamy możliwości wykonania co najmniej 7 (siedmiu) pomiarów mierzonej wielkości to należy pamiętać o tym, że estymatę odchylenia standardowego wyznaczamy zakładając, że punkty pomiarowe podlegają rozkładowi Studenta a nie Gaussa. Pamiętajmy jednak, że wykonywanie większej liczby pomiarów ma sens jedynie jeśli metoda pomiarowa jest dostatecznie czuła. Jeżeli fluktuacje wyników pomiarów nie przekraczają błędu aparaturowego, to staramy się zwiększyć czułość układu pomiarowego (zmiana zakresu miernika itp.). Jeśli zwiększenie czułości nie jest możliwe, wybieramy jeden z wyników jako wynik końcowy i przypisujemy mu błąd równy błędowi aparaturowemu.

Pomiary pośrednie. Przed przystąpieniem do wykonania pomiarów pośrednich należy koniecznie:

(i) Przeprowadzić analizę udziału niepewności pomiarów bezpośrednich, w niepewności wyznaczenia wartości wielkości badanej pośrednio. Przystępując do badań pośrednich wielkości  $X$ , musimy uświadomić sobie, że choć wz. (39) podają nam przepis matematyczny jak postępować w takim przypadku, niepewności wyników pomiarów bezpośrednich wielkości  $U, V, \dots$  w różnym stopniu wpływają na niepewność wyznaczenia wielkości  $X$ , a to ze względu na fakt ważenia czynnikami  $(\partial X / \partial U)^2, (\partial X / \partial V)^2, \dots$  odpowiednich przyczynków od poszczególnych pomiarów bezpośrednich. W większości przypadków wagi te zdecydowanie różnią się między sobą, powodując wzmacnianie jednych a osłabianie drugich przyczynków. Oznacza to, że zwiększenie precyzji wyznaczenia  $X$  jest możliwe przede wszystkim w drodze zwiększenia precyzji tych pomiarów bezpośrednich, których waga jest największa bowiem zwiększanie dokładności pozostałych pomiarów nie jest szczególnie istotne dla końcowego wyniku. Tak więc musimy dodatkowo:

(ii) Znaleźć te spośród wielkości mierzonych bezpośrednio, których bardzo precyzyjne wyznaczenie jest istotne dla precyzji wyznaczenia wielkości badanej, oraz

(iii) określić minimalną precyzję pomiarów pozostałych, mniej istotnych ze względu na niepewność końcowego wyniku, wielkości mierzonych bezpośrednio. Pamiętajmy jednak, że wszystko co zostało powiedziane powyżej dotyczy jedynie błędów przypadkowych! Aby uniknąć przykrych niespodzianek w postaci błędów grubych czy też jaskrawych przypadków błędów systematycznych, do dobrych nawyków powinno należeć: (i)- wykonywanie pomiarów próbnych i sprawdzenie poprawności działania zastawu pomiarowego; (ii)- jeśli to jest tylko możliwe, sporządzanie na bieżąco wykresów zależności między mierzonymi wielkościami w celu kontrolowania poprawnego przebiegu doświadczenia.

Odrzucanie niepewnych pomiarów. Korzystamy z tego, że w przedziale  $(\mu \pm 3\sigma)$  powinno zawierać się 99.7% populacji pierwotnej. Jeżeli przyjmujemy, że  $\langle x \rangle$  i  $s$  są najbardziej wiarygodnymi estymatami parametrów rozkładu pierwotnego, to mamy podstawy traktować punkty pomiarowe z naszej próby leżące poza przedziałem  $(\langle x \rangle \pm 3s)$  jako wątpliwe. Dla punktów pomiarowych drastycznie odbiegających od  $\langle x \rangle$  powinniśmy wyznaczyć iloraz  $g = |\langle x \rangle - x_i| / s$  i jeśli stwierdzimy, że  $g \geq 3$  to punkty te odrzucamy, powtarzając obliczenia  $\langle x \rangle$  i  $s$  bez ich udziału. Oczywiście postępowanie takie jest usprawiedliwione jedynie w przypadku dostatecznej liczby pomiarów, t.j. kiedy możemy stosować założenie o gaussowskim charakterze rozkładu próby.

Wykresy. Sporządzając graficzną prezentację naszych badań musimy się starać aby spełniała ona następujące warunki:

1. Staramy się zawsze szukać takiego układu współrzędnych aby zlinearyzować wykres, t.j. aby wykresem była prosta. Mamy bowiem w takim przypadku łatwość kontrolowania poprawności pomiarów czy też obliczeń. Np. związek  $y = ax^b$  staramy się przedstawiać na wykresie  $y = ax'$ ; ( $x' = x^b$ ) – gdy wiemy ile dokładnie wynosi albo powinna wynosić wartość wykładnika  $b$ ; albo w postaci  $y' = a' + bx'$ ; [ $y' = \ln(y)$ ,  $a' = \ln(a)$  i  $x' = \ln(x)$ ] - gdy chodzi nam również o wyznaczenie wartości parametru  $b$ . Zestawienie najczęściej stosowanych przekształceń linearyzujących zależności funkcyjne można znaleźć w: *Matematyka. Poradnik Encyklopedyczny. cz. VI, Bronsztejn I.N. i Siemiendiajew K. A., PWN Warszawa 1986.*

2. Skale osi odciętych i rzędnych dobieramy tak aby wykres był możliwie diagonalny.

3. Linia, którą prowadzimy przez punkty na wykresie ma stanowić najbardziej wiarygodną estymatę zależności między wielkościami odkładanymi na obu osiach, np.  $y = f(x)$ .

Jeżeli krzywa ta nie jest dopasowywana numerycznie MNK, to musimy posłużyć się intuicją. Ponieważ większość zależności między badanymi wielkościami ma charakter ciągły i monotoniczny to linia prowadzona przez punkty pomiarowe powinna być gładka i spełniać przynajmniej wzrokowo warunki wiarygodnego dopasowania: (i)- przechodzić przez możliwie największą liczbę punktów pomiarowych, (ii)- liczba punktów po obu stronach linii musi być porównywalna i (iii)- odległości punktów od linii powinny być jak najmniejsze.

4. Jeżeli naszym zadaniem jest wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej lub, w trudniejszym przypadku - pochodnej funkcji w dowolnym jej punkcie, **metodą graficzną**, t.j. z wykresu, musimy pamiętać o tym, że tangens nachylenia to nie jest stosunek  $\Delta y/\Delta x$  w jednostkach papieru milimetrowego lecz w jednostkach wielkości  $x$  i  $y$ ! Najpewniejszą metodą postępowania w takim przypadku jest tak dobrać przedział  $\Delta x$  na skali wykresu aby stanowił on pełną jednostkę wartości wielkości  $X$  a następnie wyznaczyć odpowiadający mu przedział  $\Delta y$ .

5. W przypadku, kiedy dopasowywana numerycznie do punktów doświadczalnych prosta (lub w ogólności - krzywa) jest krzywą kalibracyjną układu pomiarowego, należy nie tylko wyznaczyć parametry tej krzywej ale również wyznaczyć granice przedziału ufności na zadanym poziomie ufności (najczęściej dla  $p=0.683$ , t.j. odchylenia standardowego), a na wykresie zaznaczyć krzywą kalibracyjną oraz granice przedziału ufności.

Dyskusja wyników. Dyskusja wyników powinna zawierać:

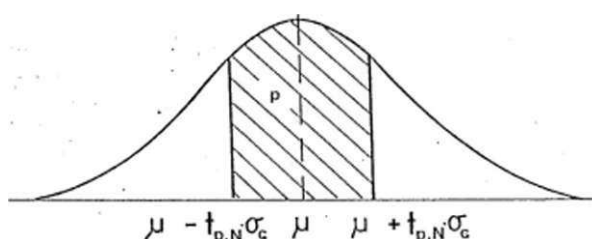
1. Szczegółową ocenę błędów pomiarów bezpośrednich (błędy grube, systematyczne, analiza błędów przypadkowych ze szczególnym uwzględnieniem możliwości sprawdzenia czy rozkład próby jest gaussowski, błędy aparaturowe), ocenę błędów wielkości badanych pośrednio (ew. błędy oszacowań graficznych), ze szczególnym podkreśleniem, która z wielkości badanych bezpośrednio wnosi największą niepewność do wyniku końcowego i dlaczego;

2. Odrzucenie niepewnych punktów pomiarowych, jeśli są takie, i powtórzenie obliczeń bez tych punktów;

3. Porównanie wyniku końcowego z wartością tablicową ma służyć do krytycznego ustosunkowania się mierzącego do własnej pracy. Jeżeli wartość tablicowa zawiera się w przedziale ufności na poziomie ufności  $p=0.95$ , t.j. w przedziale  $(\langle x \rangle \pm 2s_{\langle x \rangle})$ , to uznajemy wynik za prawdopodobny i nie ma podstaw wątpić w poprawność wykonanych pomiarów. Jeżeli jednak rozbieżność między wynikiem badań a wartością tablicową jest znacznie większa, należy szukać przyczyny i źródła takiej rozbieżności, ustalić czy jest to następstwem błędu grubego czy systematycznego, jaka część zestawu pomiarowego przypuszczalnie za to odpowiada.

**TABELA II**

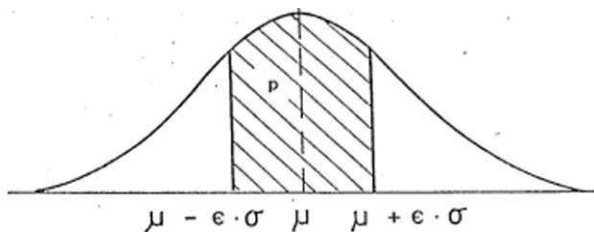
Rozkład Studenta. Poziomy ufności  $p$  i odpowiadające im przedziały ufności w jednostkach gaussowskiego odchylenia standardowego.



N	p												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	14	29	45	62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	14	28	42	58	77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	13	27	41	57	74	94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	13	27	41	56	73	92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	13	27	40	55	72	90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	13	26	40	55	71	90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,0
9	13	26	40	54	71	90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	13	26	40	54	70	88	1,1	1,4	1,9	2,3	2,8	3,3	4,8
11	13	26	40	54	70	88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	13	26	40	54	70	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	13	26	40	54	70	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	13	26	39	54	69	87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	13	26	39	54	69	87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
16	13	26	39	54	69	87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0
17	13	26	39	54	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
18	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
19	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	3,9
20	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
21	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
22	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
23	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
24	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
25	13	26	39	53	69	86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7

TABELA I

Rozkład Gaussa (rozkład normalny). Poziomy ufnosci  $p$  i odpowiadające im przedziały ufnosci w jednostkach odchylenia standardowego.



$\epsilon$	$p$	$\epsilon$	$p$	$\epsilon$	$p$
0	0	1,2	0,77	2,6	0,990
0,05	0,04	1,3	0,80	2,7	0,993
0,1	0,08	1,4	0,84	2,8	0,995
0,15	0,12	1,5	0,87	2,9	0,996
0,2	0,16	1,6	0,89	3,0	0,997
0,3	0,24	1,7	0,91	3,1	0,9981
0,4	0,31	1,8	0,93	3,2	0,9986
0,5	0,38	1,9	0,94	3,3	0,9990
0,6	0,45	2,0	0,95	3,4	0,9993
0,7	0,51	2,1	0,964	3,5	0,9995
0,8	0,57	2,2	0,972	3,6	0,9997
0,9	0,63	2,3	0,978	3,7	0,9998
1,0	0,68	2,4	0,984	3,8	0,99986
1,1	0,73	2,5	0,988	3,9	0,99990
				4,0	0,99993